

Stochastische optimale Steuerungsprobleme mit partieller Information für einen Energiespeicher

Von der Fakultät für MINT – Mathematik, Informatik, Physik,
Elektro- und Informationstechnik

der Brandenburgischen Technischen Universität Cottbus-Senftenberg

zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doctor rerum naturalium
(Dr. rer. nat)

genehmigte

Dissertation

vorgelegt von

Herrn Diplom-Wirtschaftsmathematiker

Anton A. Shardin

geboren am 16. Januar 1985 in Moskau

Gutachter: Herr Prof. Dr. Ralf Wunderlich

Gutachter: Frau Prof. Dr. Nicole Bäuerle

Gutachter: Herr Prof. Dr. Wilfried Grecksch

Tag der mündlichen Prüfung: 14. Juli 2017

Kurzfassung

In dieser Arbeit werden stochastische Optimalsteuerungsprobleme unter partieller Information untersucht, welche im Zusammenhang mit der optimalen Bewirtschaftung eines Energiespeichers entstehen. Dabei werden sowohl der Fall eines endlichen als auch unendlichen Zeithorizontes betrachtet. Für die Beschreibung des Energiepreises wird ein Regime-Switching-Modell eingesetzt, in dem die sich ändernden ökonomischen Rahmenbedingungen durch eine nicht beobachtbare Markov-Kette beschrieben werden.

Das entstehende stochastische Optimalsteuerungsproblem unter partieller Information wird durch Anwendung von Filtertechniken in ein Problem unter voller Information überführt. Anschließend wird die dem neuen Problem zugeordnete Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung (HJB-Gleichung) aufgestellt und untersucht. Diese HJB-Gleichung ist degeneriert, da der Diffusionsteil des Differentialoperators nicht gleichmäßig elliptisch ist. Damit ist es nicht möglich, klassische Existenz- und Eindeutigkeitsresultate für die Lösung der HJB-Gleichung und entsprechende Verifikationssätze für das Optimalsteuerungsproblem anzuwenden. Deshalb wird in der Dissertation eine Regularisierungstechnik eingesetzt, welche die gleichmäßige Elliptizität des Differentialoperators herstellt. Es wird der Beweis geführt, dass die Wertfunktion für das regularisierte Kontrollproblem gegen die für das Ausgangsproblem konvergiert, wenn der bei der Regularisierung eingesetzte Störterm gegen null geht. Schließlich wird gezeigt, dass die optimalen Steuerungen für das regularisierte Problem näherungsweise optimal für das Ausgangsproblem sind. Für die optimalen Steuerungen wird eine geschlossene Darstellung in Form einer Markovschen Entscheidungsregel in Abhängigkeit von der Wertfunktion angegeben.

Für das untersuchte Steuerungsproblem ist nicht zu erwarten, eine analytische Lösung der HJB-Gleichung zu erhalten. Daher werden in der Arbeit auf Differenzenverfahren aufbauende numerische Methoden zum Lösen der HJB-Gleichung behandelt. Für das Steuerungsproblem mit endlichem Zeithorizont werden insbesondere ein Semi-Lagrangesches und ein explizit-implizites Approximationsschema entwickelt und deren Eigenschaften untersucht. Für das Problem mit unendlichem Zeithorizont wird das Steuerungsproblem mit dem Policy-Improvement-Verfahren iterativ gelöst.

Die Arbeit präsentiert eine Vielzahl von Ergebnissen numerischer Experimente, welche mit den entwickelten Verfahren durchgeführt wurden. Diese zeigen typische Eigenschaften der Wertfunktion und der optimalen Steuerung. Der Vergleich der Ergebnisse für unterschiedliche Regularisierungsparameter mit denen für das unregularisierte Problem bestätigt die erhaltenen theoretischen Konvergenzaussagen. Schließlich wird die Sensitivität der Wertfunktion und der optimalen Steuerung hinsichtlich der Variation der Modellparameter untersucht.

Abstract

In this thesis stochastic optimal control problems under partial information, which occur in the context of optimal management of an energy storage facility are studied. Thereby the case of a finite as well as an infinite time horizon are considered. For the description of the energy price a regime switching model is applied, where the changing economic framework is described by a non-observable Markov chain.

The resulting stochastic optimal control problem under partial information is transformed into a problem under full information by the application of filtering techniques. Subsequently the Hamilton-Jacobi-Bellman equation (HJB equation) associated to the new problem is derived and studied. This HJB equation is degenerate since the diffusion part of the differential operator is not uniformly elliptic. Hence it is not possible to apply classical existence and uniqueness results and corresponding verification theorems for the optimal control problem to the solution of the HJB equation. Therefore, in this dissertation a regularisation technique is used, which makes the differential operator uniformly elliptic. It is proven that the value function for the regularised control problem converges to the one of the original problem as the error term used for the regularisation goes to zero. Finally it is shown that the optimal controls for the regularised problem are approximately optimal for the original problem. For the optimal controls a closed form description in the form of a Markov decision rule in dependence of the value function is derived.

For the studied control problem it is not expected to obtain an analytical solution of the HJB equation. Therefore, in this thesis numerical methods for solving the HJB equation, which build on difference methods, are treated. For the control problem with finite time horizon particularly a semi-Lagrangian and an explicit-implicit approximation scheme are developed and their properties are studied. For the problem with infinite time horizon the control problem is solved iteratively with the policy improvement method.

The thesis presents a multitude of results of numerical experiments, which were conducted with the developed methods. These show typical properties of the value function and the optimal control. The comparison of the results with different regularisation parameters to the ones of the non-regularised problem confirms the obtained theoretical convergence statements. Finally, the sensitivity of the value function and the optimal control with respect to the variation of the model parameters is studied.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Stochastisches optimales Steuerungsproblem mit partieller Information	7
1.1 Stochastisches optimales Steuerungsproblem	7
1.1.1 Allgemeine Problemstellung	8
1.1.2 Energiespeicher	11
1.1.3 Stochastisches optimales Steuerungsproblem mit partieller Information	19
1.1.4 HMM-Filter	27
1.2 Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung	32
1.2.1 Optimierungsproblem mit voller Information	32
1.2.2 Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung	37
1.2.3 Optimale Strategie	39
1.3 Regularisierung	43
1.3.1 Endlicher Zeithorizont	44
1.3.2 Unendlicher Zeithorizont	55
1.3.3 Asymptotische Eigenschaften	58
2 Lösung der Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung	69
2.1 Endlicher Zeithorizont	70
2.1.1 Semi-regularisiertes Optimalsteuerungsproblem	71
2.1.2 Diskretisierung der Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung	74
2.1.3 Semi-Lagrange-Approximationsschema	78
2.1.4 Eigenschaften des Differenzenschemas	86
2.1.5 Explizit-implizites Differenzenschema für das voll-regularisierte Optimalsteuerungsproblem	90
2.2 Unendlicher Zeithorizont	95
2.2.1 Optimalsteuerungsproblem	95
2.2.2 Policy Improvement	96
2.2.3 Numerische Lösung	98
2.2.4 Eigenschaften des Differenzenschemas	102
3 Numerische Ergebnisse	105
3.1 Modell- und Diskretisierungsparameter	105
3.2 Endlicher Zeithorizont	108

3.3	Unendlicher Zeithorizont	116
3.4	Parametersensitivität	120
3.4.1	Sensitivität bezüglich der Markov-Modulation	121
3.4.2	Sensitivität bezüglich des Gleichgewichtsniveaus	124
3.4.3	Sensitivität bezüglich der Steifigkeit	127
3.4.4	Sensitivität bezüglich der Volatilität	127
3.4.5	Sensitivität bezüglich der Speicherkapazität	129
3.4.6	Sensitivität bezüglich der Endbedingung	131
3.5	Policy Improvement	136
3.5.1	Endlicher Zeithorizont	136
3.5.2	Unendlicher Zeithorizont	140
	Zusammenfassung und Ausblick	141
	A Optimale Strategie	147
	B Differenzenverfahren	153
B.1	Grundlagen der Differenzenverfahren	153
B.2	Eindimensionale Differentialgleichung zweiter Ordnung	160
B.3	Zweidimensionale partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung	165
B.3.1	Gleichung ohne gemischte Ableitung	167
B.3.2	Gleichung mit gemischter Ableitung	174
	C Beweise	179
C.1	Beweis von Lemma 1.2.3	179
C.2	Beweis von Lemma 1.2.4	180
C.3	Beweis von Theorem 2.1.10	181
C.4	Beweis von Theorem 2.1.13	182
C.5	Beweis von Theorem 2.1.15	184
C.6	Beweis von Theorem 2.1.19	186
	Literaturverzeichnis	187

Energiespeicher ermöglichen den zeitlichen Ausgleich von Angebot und Nachfrage an Energie. In Perioden mit niedriger Nachfrage oder Überproduktion können sie Energie speichern, um sie in Zeiten stärkeren Bedarfs wieder in das Energienetz einzuspeisen. Dies betrifft sowohl Gasspeicher als auch Speicher für elektrische Energie. Letztere haben in den vergangenen Jahren an Bedeutung gewonnen, da einerseits in zunehmenden Maße erneuerbare Energien in den Strommarkt drängen, andererseits deren Produktion starken Fluktuationen unterworfen ist, die nur schwer zu prognostizieren und zu steuern sind.

Neben vielen technischen Fragen im Zusammenhang mit der Versorgungssicherheit ist es sinnvoll, auch ökonomische Aspekte der Energiespeicherung zu betrachten. Dabei geht es um die Ausnutzung der einem Speicher innewohnenden Optionalität, welche den zeitlichen Transfer von Energie erlaubt. Damit kann der Besitzer eines Energiespeichers von den fluktuierenden Energiepreisen profitieren und durch den Handel an den Energiemärkten und ein aktives Speichermanagement Gewinne erwirtschaften. Ausgehend von dem bekannten Prinzip „buy low and sell high“ wird bei niedrigen Preisen Energie gekauft und gespeichert und bei hohen Preisen wieder verkauft, sodass die erzielten Gewinne die Kosten für den Betrieb des Speichers und die unvermeidlichen dissipativen Verluste bei der Energieumwandlung übersteigen. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die zeitlichen Fluktuationen der Marktpreise für Energie nicht oder nur unvollständig vorhergesagt werden können. Dies verlangt vom Speichermanager, dass er seine Entscheidungen stets unter der Unsicherheit über die zukünftigen Energiepreise zu treffen hat.

Für die ökonomische Bewertung eines Energiespeichers werden Hilfsmittel aus der Theorie der Realoptionen eingesetzt. Die Grundidee ist die Betrachtung des aus dem Kauf und Verkauf von Energie resultierenden Zahlungsstromes mit dem Ziel, den erwarteten Barwert dieses Zahlungsstromes zu maximieren. Dabei werden die Unsicherheiten über die zukünftigen Energiepreise durch die Bildung des Erwartungswertes berücksichtigt. Dies führt auf ein stochastisches Optimalsteuerungsproblem. Die darin enthaltene Steuerung ist die Speicherstrategie, welche bestimmt, zu welcher Zeit welche Menge Energie gespeichert oder abgegeben wird. Der Wert des Steuerungsproblems, d.h. der maximale erwartete Barwert des Zahlungsstromes, beschreibt den ökonomischen Wert des Speichers. Dieser definiert dann den Preis, welcher bei Vermie-

tung oder Verkauf des Speichers zu zahlen ist. Darüber hinaus ist dieser Preis auch für die in zunehmenden Maße an den Finanz- und Energiemärkten gehandelten Kontrakte über virtuelle Energiespeicher interessant (siehe Carmona u. Ludkovski [10]). Hierbei erwirbt der Inhaber des Vertrages die Rechte über die Kontrolle des Energiespeichers ohne diesen selbst zu besitzen. Solche Verträge stellen Realoptionen auf Energiepreise dar, insbesondere handelt es sich um sogenannte „Switching Optionen“. Diese geben dem Besitzer der Option das Recht aber nicht die Verpflichtung, zwischen den Zuständen des Speicherbetriebes „Kaufen/Laden“, „Verkaufen/Entladen“ und „Warten“ umzuschalten.

In der Literatur wurden in den letzten Jahren eine Reihe von stochastischen Optimalsteuerungsproblemen für verschiedene Typen der Energiespeicher studiert. So haben z.B. Bäuerle u. Riess [6], Carmona u. Ludkovski [10], Chen u. Forsyth [12, 14], Thompson, Davison u. Rasmussen [70] und Ware [73] die Bewirtschaftung von Gasspeichern betrachtet. Sie untersuchen die Bestimmung von optimalen Strategien für das Befüllen und die Entnahme von Gas, welche den erwarteten Barwert des durch den Kauf und Verkauf von Gas entstehenden Zahlungsstromes über einen endlichen Zeithorizont maximieren. Ähnliche Probleme für Pumpspeicherkraftwerke zur Stromspeicherung wurden in Thompson, Davison u. Rasmussen [69], Zhao u. Davison [75] und Chen u. Forsyth [13] untersucht. Hier besteht die Aufgabe darin, die Menge des in den Speicher gepumpten oder aus diesem abgelassenen Wassers so zu steuern, dass der erwartete Barwert des durch den Stromverbrauch in den Pumpen bzw. die Erzeugung von Strom in den Turbinen generierten Zahlungsstromes maximiert wird.

In dieser Dissertation konzentrieren wir uns auf den Fall eines Pumpspeichers als Beispiel eines allgemeinen Energiespeichers. Der Pumpspeicher besteht aus zwei sich auf verschiedenen Höhen befindenden Reservoirs oder Speicherbecken. Das Grundprinzip besteht darin, in Zeiten niedriger Energiepreise Wasser aus dem Unterbecken in das Oberbecken zu pumpen. Dabei wandeln die Pumpen die aus dem Stromnetz entnommene elektrische Energie in potentielle Energie des Wassers um. Umgekehrt wird in Zeiten hoher Preise Wasser aus dem Oberbecken in das Unterbecken abgelassen und dabei durch die Turbinen geleitet, welche Strom produzieren und diesen ins Stromnetz einspeisen. Pumpspeicher dienen auch als Pufferspeicher für die zeitlich stark fluktuierende und nur schwer prognostizierbare Einspeisung von Wind- und Solarenergie. Mit dem wachsenden Marktanteil der erneuerbaren aber in ihrer Produktion nur schwer steuerbaren Energien gewinnen Pumpspeicher damit zunehmend an Bedeutung.

Die genaue mathematische Modellierung aller ingenieurtechnischen Aspekte eines Pumpspeichers stellt eine große Herausforderung dar, welche nicht das Ziel der vorliegenden Arbeit ist. Wir beschränken uns auf ein vereinfachtes Modell, wie es in Thompson, Davison u. Rasmussen [69] und Zhao u. Davison [75] vorgeschlagen wird, welches die wichtigsten physikalischen und technischen Phänomene erfasst ohne sämtliche ingenieurtechnischen Details zu berücksichtigen.

Über die bekannten und relativ gut verstandenen saisonalen Schwankungen und Trends hinaus wird der Verlauf der Energiepreise auch maßgeblich von den ökonomischen Rahmenbedingungen, den Änderungen in Angebot und Nachfrage und der allgemeinen geopolitischen Situation beeinflusst. Diese Effekte erfassen wir in unserem Modell durch die Einführung eines zusätzlichen stochastischen Faktorprozesses, welcher die Dynamik der Energiepreise treibt. Insbesondere verwenden wir ein Regime-Switching-Modell, bei dem der Energiepreis durch

einen Diffusionsprozess beschrieben wird, dessen Drift von einer nicht direkt beobachtbaren zeitstetigen Markov-Kette mit endlich vielen Zuständen abhängt. Damit kann die Unsicherheit über den momentanen Zustand der Ökonomie erfasst werden. Die Verwendung eines nicht direkt beobachtbaren Faktorprozesses ist sowohl aus ökonomischen als auch aus statistischen Gründen näher an der Realität. So werden Änderungen der ökonomischen Rahmenbedingungen in der Regel nicht sofort wahrgenommen, sondern erst im Laufe der Zeit. Außerdem ist es aus statistischer Sicht ausgesprochen schwierig und in der Praxis aussichtslos, genaue und verlässliche Schätzungen für die Drift eines Diffusionsprozesses zu erhalten. So erfordert selbst die Schätzung einer zeitlich konstanten Drift Beobachtungen über extrem lange Zeiträume, welche in der Praxis nicht vorliegen (siehe Rogers [56, Abschnitt 4.2]).

Die Literatur zur stochastischen Optimalsteuerung von Energiespeichern betrachtet bisher meist mathematische Modelle mit zeitlich konstanten ökonomischen Rahmenbedingungen sowie vollständig beobachtbaren Parametern des stochastischen Prozesses für den Energiepreis. Zu den wenigen Ausnahmen gehören die Arbeiten von Bäuerle u. Riess [6] und Chen u. Forsyth [14]. In [6] wird der Energiepreis durch einen Mean-Reversion-Prozess beschrieben, dessen zeitabhängiges Gleichgewichtsniveau von einer beobachtbaren Markov-Kette abhängt. Chen u. Forsyth haben in [14] das Modell aus ihrer Arbeit [12] zu einem Regime-Switching-Modell erweitert, um sich ändernde ökonomische Rahmenbedingungen zu erfassen. Dort ist der Energiepreis ein Diffusionsprozess, dessen Drift- und Diffusionskoeffizienten von einer beobachtbaren Markov-Kette mit zwei Zuständen abhängen. Die beiden Regimes beschreiben die möglichen Zustände des Energiemarktes. In jedem der beiden Zustände wird der Energiepreis durch einen eigenen stochastischen Prozess modelliert, welcher entweder ein Mean-Reversion-Prozess oder eine geometrische Brownsche Bewegung (sowie ein Prozess von gleichem Typ, aber mit verschiedenen Parametern im Driftterm) ist. Die Autoren zeigen außerdem, dass ein solches Regime-Switching-Modell sehr gut an empirische Marktdaten kalibriert werden kann.

Im Unterschied zu den obigen Arbeiten wird in der vorliegenden Dissertation der Energiepreis durch einen Diffusionsprozess beschrieben, dessen Drift von einem *nicht beobachtbaren* Faktorprozess abhängt. Insbesondere wird ein Regime-Switching-Modell eingesetzt, bei dem der Driftkoeffizient eines Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses (OU-Prozess) von einer nicht beobachtbaren zeitstetigen Markov-Kette abhängt (siehe z.B. Erlwein, Benth u. Mamon [24]). Die Markov-Kette treibt dabei sowohl das Gleichgewichtsniveau (Mean-Reversion-Level) als auch die Steifigkeit (Mean-Reversion-Geschwindigkeit) des OU-Prozesses. Dieser Ansatz führt auf ein stochastisches Optimalsteuerungsproblem mit *partieller Information*. Derartige Probleme wurden in den letzten Jahren bereits intensiv in der Literatur für Aufgaben aus der Finanz- und Versicherungsmathematik untersucht, z.B. in Björk, Davis u. Landén [8], Elliott, Aggoun u. Moore [22], Frey, Gabih u. Wunderlich [29, 30], Honda [36], Lakner [46, 47], Rieder u. Bäuerle [4, 55], Sass u. Haussmann [61] und Szölgényi [68].

An dieser Stelle setzt die vorliegende Dissertation an und untersucht stochastische Optimalsteuerungsprobleme mit partieller Information für einen Energiespeicher, wobei insbesondere eine Konzentration auf den Fall eines Pumpspeichers erfolgt. Dabei werden sowohl der Fall eines endlichen als auch unendlichen Zeithorizontes betrachtet. Für die Beschreibung des Energiepreises wird ein Regime-Switching-Modell eingesetzt, in dem sich ändernde ökonomische Rahmenbedingungen durch eine nicht beobachtbare Markov-Kette erfasst werden. Das entstehende

stochastische Optimalsteuerungsproblem mit partieller Information wird durch Anwendung von Filtertechniken in ein Problem mit voller Information überführt. Anschließend wird die dem neuen Problem zugeordnete Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung (HJB-Gleichung) aufgestellt und untersucht. Diese HJB-Gleichung ist degeneriert, da der Diffusionsteil des Differentialoperators nicht gleichmäßig elliptisch ist. Eine weitere Besonderheit ist eine vom aktuellen Zustand des Kontrollsystems abhängige Menge der zulässigen Steuerungswerte. Damit ist es nicht möglich, klassische Existenz- und Eindeutigkeitsresultate für die Lösung der HJB-Gleichung und entsprechende Verifikationssätze für das Optimalsteuerungsproblem anzuwenden. Zur Behebung der genannten Schwierigkeiten wird in der Dissertation eine Regularisierungstechnik eingesetzt, welche es einerseits ermöglicht, die gleichmäßige Elliptizität des Differentialoperators wiederherzustellen und andererseits mit einer vom Zustand unabhängigen Menge zulässiger Steuerungen zu operieren. Es wird der Beweis geführt, dass die Wertfunktion für das regularisierte Kontrollproblem gegen die des Ausgangsproblems konvergiert, wenn der bei der Regularisierung eingesetzte Störterm gegen null geht. Schließlich wird gezeigt, dass die optimalen Steuerungen für das regularisierte Problem näherungsweise optimal für das Ausgangsproblem sind. Dabei gelingt es, für die optimale Strategie eine explizite Darstellung in Form einer Feedback-Entscheidungsregel anzugeben.

Einen weiteren Schwerpunkt der Arbeit stellt die Lösung der HJB-Gleichung dar. Eine analytische Lösung dieser Gleichung ist im vorliegenden Fall nicht zu erwarten. Daher werden in der Arbeit auf Differenzenverfahren aufbauende numerische Methoden zur Lösung der HJB-Gleichung behandelt. Für das Steuerungsproblem mit endlichem Zeithorizont werden zwei Differenzenschemata entwickelt und deren Eigenschaften untersucht. Das ist einerseits ein explizit-implizites Differenzenschema für das regularisierte Kontrollproblem, in dem ein Teil der den Zustand beschreibenden Variablen explizit und der andere Teil der Variablen implizit diskretisiert wird. Andererseits wird ein implizites Semi-Lagrange-Approximationsschema für das unregularisierte Kontrollproblem entwickelt, für welches eine der in den Zustand eingehenden stochastischen Differentialgleichungen degeneriert ist. Für das Problem mit unendlichem Zeithorizont wird außerdem eine iterative Lösung des Steuerungsproblems mit dem Policy-Improvement-Verfahren eingesetzt. Mit den vom Autor in MATLAB entwickelten Implementierungen der numerischen Verfahren wurden eine Vielzahl von numerischen Experimenten durchgeführt, deren Ergebnisse in der Arbeit präsentiert werden. Diese zeigen typische Eigenschaften der Wertfunktion und der optimalen Steuerung. Weiterhin erfolgt ein Vergleich der Ergebnisse für unterschiedliche Regularisierungsparameter mit den Resultaten für das unregularisierte Problem, um die erhaltenen Konvergenzaussagen zu illustrieren. Außerdem wird die Sensitivität der Wertfunktion und der optimalen Steuerung hinsichtlich der Variation ausgewählter Parameter untersucht.

Die Arbeit besteht aus drei Kapiteln und einem Anhang. Im ersten Kapitel wird ein mathematisches Modell für einen Pumpspeicher als Beispiel eines Energiespeichers entwickelt und darauf aufbauend ein stochastisches optimales Steuerungsproblem formuliert. Dabei wird der Energiepreis als Markov-modulierter OU-Prozess beschrieben, dessen Driftparameter von einer nicht direkt beobachtbaren zeitstetigen Markov-Kette getrieben werden. Mit Hilfe von Filtertechniken wird das Optimalsteuerungsproblem mit partieller Information in ein Problem mit vollständiger Information transformiert. Die zu diesem Problem gehörende HJB-Gleichung

wird mit Hilfe einer Regularisierungsprozedur in eine partielle Differentialgleichung mit einem gleichmäßig elliptischen Differentialoperator im Diffusionsteil überführt. Im Anschluss daran werden für das regularisierte Kontrollproblem Konvergenzeigenschaften für die Wertfunktion und die optimale Steuerung untersucht. Diese Untersuchungen werden getrennt für den Fall eines endlichen bzw. unendlichen Zeithorizontes durchgeführt.

Das zweite Kapitel widmet sich konkreten Lösungsverfahren für das betrachtete stochastische Optimalsteuerungsproblem. Hier werden Differenzenschemata zur numerischen Lösung der HJB-Gleichung behandelt. Dies erfolgt exemplarisch für den Fall einer Markov-Kette mit zwei Zuständen, für den der im Zustand des Kontrollsystems enthaltene Filter auf einen lediglich eindimensionalen Prozess reduziert werden kann. Anschließend wird das Kontrollproblem mit endlichem Zeithorizont im regularisierten Fall mit Hilfe eines explizit-impliziten Differenzenschemas und im nichtregularisierten Fall mittels eines impliziten Semi-Lagrange-Approximationsschemas numerisch gelöst. Für das stochastische Optimalsteuerungsproblem mit unendlichem Zeithorizont wird das Policy-Improvement-Verfahren verwendet, bei dem in jedem Iterationsschritt eine lineare zeitunabhängige PDE zu lösen ist. Hierfür kommen wieder Differenzungsverfahren zum Einsatz. Für alle entwickelten Differenzenschemata werden deren Eigenschaften untersucht.

Im dritten Kapitel werden schließlich Ergebnisse von numerischen Experimenten mit den in Kapitel 2 entwickelten numerischen Verfahren zur Lösung der Kontrollprobleme für einen Energiespeicher präsentiert. Zunächst werden die Wertfunktion und die optimale Steuerung visualisiert und typische Eigenschaften dieser Größen herausgearbeitet. Zur Illustration der erhaltenen Konvergenzaussagen für die Regularisierungsprozedur erfolgt danach ein Vergleich der Ergebnisse für unterschiedliche Regularisierungsparameter mit denen für das unregularisierte Problem. Weiterhin präsentiert Kapitel 3 Ergebnisse einer Sensitivitätsanalyse, bei der die Abhängigkeit der Wertfunktion und der optimalen Steuerung von der Wahl ausgewählter Modellparameter untersucht wird. Schließlich erfolgt eine Gegenüberstellung von Ergebnissen, die mit dem Policy-Improvement-Verfahren als Alternative zur Semi-Lagrange-Methode erhalten wurden.

Im Anhang werden technische Beweise und Herleitungen für einige Resultate aus Kapitel 1 bereitgestellt. Außerdem finden sich dort eine Zusammenstellung von wichtigen Begriffen zu Differenzenverfahren, die Beschreibung von Differenzenschemata für die numerische Lösung partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung und Beweise für die in Kapitel 2 formulierten Eigenschaften der entwickelten Differenzenschemata für die numerische Lösung der stochastischen Optimalsteuerungsprobleme.

Die Teilergebnisse der Arbeit sind in den beiden Publikationen Shardin u. Wunderlich [65] und Shardin u. Szölgyenyi [64] in referierten Fachjournals erschienen. In [65] liegt der Schwerpunkt auf dem Kontrollproblem mit endlichem Zeithorizont während sich [64] mit der Frage der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der gesteuerten Zustandsgleichung im Falle von unstetigen Steuerungen beschäftigt.

An dieser Stelle möchte ich all jenen danken, die am Zustandekommen der Arbeit beteiligt waren. An erster Stelle gilt mein herzlicher Dank meinem Doktorvater Herrn Prof. Ralf Wunderlich. Er hat mich im Laufe meiner Forschungsarbeit an meinem Dissertationsvorhaben allseitig betreut und unterstützt. Ich bin sehr dankbar für seine Verbesserungsvorschläge, sowie

seine Zeit, die er für meine Arbeit geleistet hat. Schließlich bedanke ich mich bei ihm für die nützliche Zusammenarbeit und tatkräftige Motivation, die mich nicht zuletzt inspiriert hat, mich mit neuen Aufgabenstellungen auseinanderzusetzen.

Mein herzlicher Dank gilt Frau Dr. Michaela Szölgyenyi (WU Wien) für unsere erfolgreiche Zusammenarbeit, ihre wertvollen Ratschläge zur Thematik meiner Dissertationsarbeit, sowie ihre Bereitschaft beim Korrekturlesen.

Ich bin froh, mich bei meinen Kolleginnen an der BTU Cottbus-Senftenberg Frau Dr. Antje Mugler für ihre wichtigen Bemerkungen bei der Vorbereitung einer Publikation und Frau M. Sc. Imke Friederike Redeker für ihre Bereitschaft zum Korrekturlesen meiner Arbeit bedanken zu können. Außerdem bin ich allen Teilnehmern des Forschungsseminars Stochastik dankbar, in dem ich die Möglichkeit gehabt habe, den Stand meiner Forschung zu präsentieren.

Mein besonderer Dank geht an die Mitglieder der ehemaligen Nachwuchsforschergruppe Hybride Systeme, von der ich im Zeitraum 2011-2014 finanziell über ein Stipendium unterstützt wurde, insbesondere Frau Prof. Sabine Pickenhain (BTU Cottbus-Senftenberg), Frau Prof. Magdalena Mißler-Behr (BTU Cottbus-Senftenberg) und Frau Prof. Katja Schimmelpfeng (Universität Hohenheim).

Schließlich danke ich den Lehrstühlen für Wirtschaftsmathematik, an dem die Arbeit an der Promotion durchgeführt wurde, ABWL und Besondere der Planung und des Innovationsmanagement für die Bereitstellung eines Büros in den ersten Jahren meiner Promotion und Angewandte Mathematik, insbesondere Herrn Prof. Michael Breuß, für eine Projektstelle.

Stochastisches optimales Steuerungsproblem mit partieller Information

In diesem Kapitel wird ein stochastisches optimales Steuerungsproblem formuliert, welches bei der Bewertung und optimalen Bewirtschaftung eines Energiespeichers entsteht. Am Beispiel eines Pumpspeichers wird die Dynamik des Speicherfüllstandes in Abhängigkeit von der gewählten Lade- bzw. Entladerate und eines natürlichen Zuflusses beschrieben. Der Energiepreis wird als stochastischer Prozess modelliert, dessen Drift von einem nicht beobachtbaren Faktorprozess abhängt. Ziel ist es, den erwarteten Gewinn durch Kauf- und Verkauf von Energie zu maximieren. Unter Verwendung von Methoden aus der Filtertheorie und der dynamischen Programmierung wird die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung (HJB-Gleichung) für das betrachtete Steuerungsproblem hergeleitet. Diese Gleichung ist degeneriert, da ihr Diffusionsteil nicht gleichmäßig elliptisch ist. Um dieser HJB-Gleichung eine präzise mathematische Bedeutung zu geben, werden Regularisierungstechniken eingesetzt. Dabei wird gezeigt, dass die optimale Steuerung für das regularisierte Problem näherungsweise optimal für das Originalproblem ist. Außerdem wird eine explizite Entscheidungsregel hergeleitet, aus der sich die optimale Steuerung in Feedback-Form, d.h. in Abhängigkeit vom aktuellen Zustand und der Zeit, ergibt.

1.1 Stochastisches optimales Steuerungsproblem

In diesem Abschnitt wird zunächst ein allgemeines stochastisches optimales Steuerungsproblem formuliert. Anschließend erfolgt die Betrachtung eines bei der Optimierung eines Energiespeichers entstehenden Spezialfalles. Dort wird die optimale Bewirtschaftung eines Pumpspeichers unter Berücksichtigung einer begrenzten Speicherkapazität und der unbekannten zukünftigen Energiepreise betrachtet. Ziel ist es, den erwarteten diskontierten Gewinn, der durch Handel am Strommarkt und das Laden und Entladen von Energie entsteht, zu maximieren. Dieses Optimierungsproblem wird für ein stochastisches Strompreismodell betrachtet, welches sich ändernde Marktzustände und unvollständige Information über den Energiepreisprozess berücksichtigt.

1.1.1 Allgemeine Problemstellung

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$, ein vollständiger filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum mit einer den üblichen Bedingungen genügenden Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$, $T < \infty$, auf dem ein m -dimensionaler Wiener-Prozess $(W_t)_{t \in [0, T]}$ mit $m \in \mathbb{N}$ definiert ist. Es wird ein dynamisches System betrachtet, dessen Zustand durch einen auf diesem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum definierten adaptierten stochastischen Vektorprozess $(X_t^u)_{t \in [0, T]}$ mit Werten in \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, beschrieben wird. Die Dynamik von $(X_t^u)_{t \in [0, T]}$ wird durch die stochastische Differentialgleichung (SDE)

$$dX_t^u = a(X_t^u, u_t)dt + b(X_t^u)dW_t, \quad X_0^u = x_0, \quad (1.1)$$

mit der Drift $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$, und dem Diffusionskoeffizienten $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ modelliert, wobei

$$\begin{aligned} X^u &= (X_1^u, \dots, X_n^u)^\top \in \mathbb{R}^n, \\ W &= (W^{(1)}, \dots, W^{(m)})^\top \in \mathbb{R}^m, \\ a &= (a_1, \dots, a_n)^\top \in \mathbb{R}^n, \\ b &= (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

gilt und $X_0^u = x_0 := (x_0^1, \dots, x_0^n)^\top \in \mathbb{R}^n$ der Anfangswert ist.

Die Dynamik des Zustandsprozesses $(X_t^u)_{t \in [0, T]}$ hängt über den Driftkoeffizienten a von einem weiteren stochastischen Prozess $u := (u_t)_{t \in [0, T]}$ ab, der als *Steuerung* bezeichnet wird. Die Steuerung selbst wird als *Markov-Steuerung* in der Form $u_t = w(t, X_t^u)$ verstanden, die für alle $t \in [0, T]$ nur vom aktuellen Zeitpunkt t und Zustand X_t^u abhängig ist, wobei $w : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Borelfunktion ist (siehe Fleming, Soner [26, Abschnitt I.5], Øksendal [51, Abschnitt 11.1]). Es wird weiterhin angenommen, dass die Werte y der Steuerung u_t in einer kompakten Teilmenge $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^k$ liegen, welche als *Menge der zulässigen Steuerungswerte* bezeichnet wird. Damit lassen sich problemtypische Beschränkungen an die Steuerung modellieren.

Bemerkung 1.1.1. In der Literatur werden auch Steuerungsprobleme betrachtet, bei denen die Drift- und Diffusionskoeffizienten a und b der Zustandsgleichung (1.1) explizit von der Zeit t und b auch von der Steuerung u abhängen. Da dies für das nachfolgende Optimierungsproblem für einen Energiespeicher nicht benötigt wird, soll auf eine solche allgemeine Darstellung verzichtet werden. Die Unabhängigkeit der Koeffizienten von der Zeit ist zudem eine typische Voraussetzung für Optimierungsprobleme mit unendlichem Zeithorizont, welche in dieser Arbeit ebenfalls betrachtet werden.

Es wird vorausgesetzt, dass die Koeffizienten a und b der SDE (1.1) folgenden Bedingungen genügen:

Annahme 1.1.2. Seien $a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ Borelfunktionen, für die gilt:

- *Wachstumsbedingung:* für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $y \in \mathbb{U}$ existiert eine Konstante $M_1 > 0$, sodass

$$|a(x, y)| + |b(x)| \leq M_1(1 + |x|); \quad (1.2)$$

- *Lipschitz-Bedingung*: für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ und $y \in U$ existiert eine Konstante $M_2 > 0$, sodass

$$|a(x_1, y) - a(x_2, y)| + |b(x_1) - b(x_2)| \leq M_2 |x_1 - x_2|, \quad (1.3)$$

wobei $|\cdot|$ die Euklidische Norm ist.

Für die Aufstellung eines Optimierungskriteriums wird der momentane Zustand X_t^u und die zugehörige Steuerung u_t durch $F(X_t^u, u_t)$ bewertet, wobei $F = F(x, y)$ eine reellwertige Funktion ist. Sie beschreibt *die laufenden Gewinne* oder *Kosten*. Für Modelle mit endlichem Zeithorizont ($T < \infty$) wird außerdem der Endzustand durch $\Phi(X_T^u)$ bewertet. Hierbei ist $\Phi = \Phi(x)$ eine reellwertige Funktion, welche *den Endgewinn* oder *die Endkosten* beschreibt. Die Funktionen F und Φ sollen den folgenden Bedingungen genügen:

Annahme 1.1.3. Seien $F : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}$ und $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Borelfunktionen, für die gilt:

- *Wachstumsbedingung*: für alle $x \in \mathbb{R}^n$ existieren Konstanten $C_1, K_1 > 0$, sodass

$$\sup_{y \in U} |F(x, y)| \leq C_1(1 + |x|), \quad |\Phi(x)| \leq K_1(1 + |x|); \quad (1.4)$$

- *Lipschitz-Bedingung*: für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ existieren Konstanten $C_2, K_2 > 0$, sodass

$$\sup_{y \in U} |F(x_1, y) - F(x_2, y)| \leq C_2 |x_1 - x_2|, \quad |\Phi(x_1) - \Phi(x_2)| \leq K_2 |x_1 - x_2|. \quad (1.5)$$

Der durch die Funktionen F und Φ definierte Zahlungsstrom kann nach dem Äquivalenzprinzip der Finanzmathematik zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ zusammengefasst werden durch den Barwert

$$G_t^u = \int_t^T e^{-\rho(r-t)} F(X_r^u, u_r) dr + e^{-\rho(T-t)} \Phi(X_T^u), \quad (1.6)$$

wobei $\rho > 0$ eine vorgegebene Diskontierungsrate und u die gewählte Steuerung ist.

Für jedes Paar $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ definiert man die *Menge der zulässigen Markov-Steuerungsprozesse*

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(t, x) = \left\{ u = (u_r)_{r \in [t, T]} \mid u \text{ ist } \mathbb{F} - \text{progressiv messbar,} \right. \\ \left. u_r = w(r, X_r^u) \text{ und } w(r, x) \in U \text{ für alle } r \in [t, T], x \in \mathbb{R}^n, \right. \\ \left. \mathbb{E} \left[\int_t^T e^{-\rho(r-t)} |F(X_r^u, u_r)| dr + e^{-\rho(T-t)} |\Phi(X_T^u)| \mid X_t^u = x \right] < \infty \right\}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

wobei $w : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Borelfunktion ist.

Das Optimierungsproblem besteht in der Maximierung einer reellwertigen *Zielfunktion* $J : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} J(t, x; u) &= \mathbb{E}[G_t^u \mid X_t^u = x] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_t^T e^{-\rho(r-t)} F(X_r^u, u_r) dr + e^{-\rho(T-t)} \Phi(X_T^u) \mid X_t^u = x\right] \end{aligned} \quad (1.8)$$

über alle zulässigen Steuerungsprozesse $u \in \mathcal{U}(t, x)$, die gemäß der Funktion (1.6) dem erwarteten Barwert entspricht.

Die reellwertige Funktion $V : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die für jedes Paar $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ als

$$V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{U}(t, x)} J(t, x; u) \quad (1.9)$$

definiert ist, wird *Wertfunktion* genannt.

Das Optimierungsproblem (1.9) ist ein *stochastisches optimales Steuerungsproblem in stetiger Zeit*. Die zulässige Steuerung $u^* \in \mathcal{U}(t, x)$, falls sie existiert, heißt *optimale Strategie*, wenn

$$V(t, x) = J(t, x; u^*)$$

gilt.

Bemerkung 1.1.4. Oft ist das Maximierungsproblem (1.9) lediglich für $t = 0$ von Interesse. Mit der Methode der dynamischen Programmierung wird es jedoch durch die „Einbettung“ in eine Familie von Optimierungsproblemen für jedes Paar $(t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^n$ gelöst.

Eine wichtige Rolle spielen auch Steuerungsprobleme mit einem unendlichem Zeithorizont ($T = \infty$) als Grenzfall bzw. Approximation von Problemen mit einem endlichen, aber hinreichend großen Zeithorizont T . Für solche Modelle werden die Prozesse $(X_t^u)_{t \in [0, \infty)}$ und $(W_t)_{t \in [0, \infty)}$ auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ mit der Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}$ definiert.

Das stochastische optimale Steuerungsproblem mit unendlichem Zeithorizont ($T = \infty$) besteht in der Maximierung der Zielfunktion $J : \mathbb{R}^n \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$

$$J(x; u) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\rho t} F(X_t^u, u_t) dt \mid X_0^u = x\right], \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathcal{U}(x), \quad (1.10)$$

über alle Steuerungen $u \in \mathcal{U}(x)$ der Menge der zulässigen Markov-Steuerungsprozesse

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(x) &= \left\{ u = (u_t)_{t \in [0, \infty)} \mid u \text{ ist } \mathbb{F} - \text{progressiv messbar,} \right. \\ &\quad \left. u_t = w(X_t^u) \text{ für alle } t \in [0, \infty) \text{ und } w(x) \in U, \forall x \in \mathbb{R}^n, \right. \\ &\quad \left. \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-\rho t} |F(X_t^u, u_t)| dt \mid X_0^u = x\right] < \infty \right\}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

wobei $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ eine Borelfunktion ist.

Dann heißt

$$V(x) = \sup_{u \in \mathcal{U}(x)} J(x; u) \quad (1.12)$$

die Wertfunktion $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ für den Fall $T = \infty$. Falls eine zulässige Steuerung $u^* \in \mathcal{U}(x)$ mit

$$V(x) = J(x; u^*)$$

existiert, dann heißt sie optimale Steuerung.

Als praktische Anwendung eines stochastischen optimalen Steuerungsproblems wird im Weiteren ein mathematisches Modell für einen Pumpspeicher studiert.

1.1.2 Energiespeicher

In diesem Abschnitt wird ein Steuerungssystem betrachtet, welches den Fall eines Pumpspeichers als ein Beispiel für einen allgemeinen Energiespeicher enthält. Die Modellierung orientiert sich an die Arbeiten von Thompson, Davison u. Rasmussen [69] und Zhao u. Davison [75]. Die Abbildung 1.1 zeigt eine schematische Darstellung eines Pumpspeichers. Dieser besteht aus zwei sich in verschiedenen Höhen befindenden Speicherbecken, einer Turbine und einer Pumpe. Die Pumpe kann elektrische in potentielle Energie umwandeln, indem sie Wasser aus dem unteren in das obere Becken hebt. Umgekehrt kann die Turbine die potentielle Energie des sich im oberen Speicherbecken befindenden Wassers in elektrische Energie umwandeln.

Neben dem Pumpen und Ablassen von Wasser kann das obere Speicherbecken noch zusätzlich über einen Zufluss (Niederschläge, Flüsse) gefüllt bzw. durch Verdunstung geleert werden. Weiterhin wird angenommen, dass sich der Füllstand des unteren Beckens durch Pumpen von Wasser in das bzw. Ablassen aus dem oberen Becken nicht ändert, wie dies bei einem Fluss oder einem großen natürlichen See der Fall ist.

Der *Zustand des Kontrollsystems* wird zu jedem Zeitpunkt durch folgende Größen beschrieben:

- Energiepreis S_t , der am Energiemarkt in EUR/MWh angegeben wird;
- natürlicher Zufluss Z_t , der die Menge des pro Zeiteinheit zusätzlich in das obere Speicherbecken einströmenden bzw. des dort verdunsteten Wassers definiert und im mathematischen Modell in m^3/s gemessen wird;
- Füllstand Q_t in m, die die Höhe des über der Turbine befindlichen Wassers angibt.

Energiepreis

Der *Energiepreis* wird durch einen Diffusionsprozess $(S_t)_{t \in [0, T]}$ modelliert, welcher der SDE

$$dS_t = a_S(S_t)dt + b_S(S_t)dW_t^S, \quad S_0 = s_0, \quad (1.13)$$

mit dem Anfangspreis $s_0 \in \mathcal{S}$, $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$, genügt. Die Koeffizienten $a_S : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ und $b_S(s) \geq b_S > 0$ genügen für alle $s \in \mathcal{S}$ der Wachstums- und Lipschitz-Bedingung (1.2) bzw. (1.3) der Annahme 1.1.2.

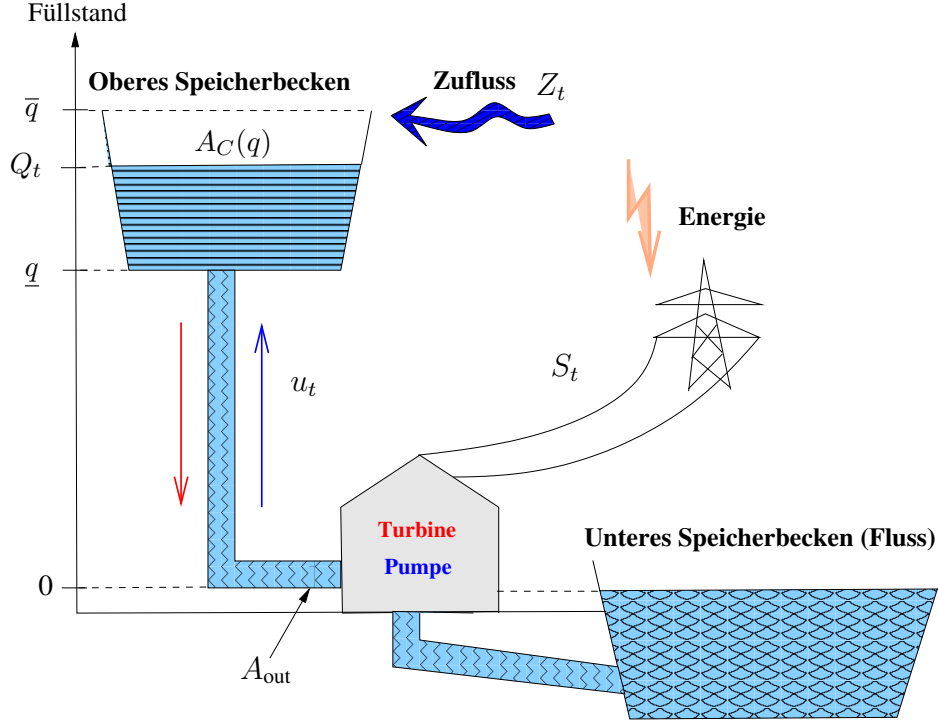


Abbildung 1.1: Die schematische Abbildung für einen natürlichen Pumpspeicher.

Eine typische Eigenschaft von Energiepreisen ist deren Schwanken und Rückkehr zu einem Gleichgewichtsniveau. Daher werden in der Literatur (siehe Benth, Lempa u. Nilssen [7], Thompson, Davison u. Rasmussen [69, 70]) häufig Mean-Reversion-Prozesse wie der *Ornstein-Uhlenbeck-Prozess* (*OU-Prozess*) in der Form

$$dS_t = \kappa(\mu - S_t)dt + \sigma dW_t^S, \quad S_0 = s_0, \quad (1.14)$$

zur Modellierung verwendet. Dabei bezeichnen die Konstanten $\mu \in \mathbb{R}$ das Gleichgewichtsniveau, $\kappa > 0$ die Steifigkeit und $\sigma > 0$ die Volatilität.

Bemerkung 1.1.5. Falls das stochastische Energiepreismodell positive Preise garantieren soll, so kann man anstelle des OU-Prozesses aus (1.14) einen *exponentiellen OU-Prozess* $(\check{S}_t)_{t \in [0, T]}$ mit $\check{S}_t = \exp(S_t) \in \mathcal{S} = \mathbb{R}_+$ verwenden.

Neben der Mean-Reversion-Eigenschaft zeichnen sich Energiepreise durch eine Abhängigkeit vom allgemeinen Zustand der Wirtschaft, von Schwankungen in Angebot und Nachfrage und von geopolitischen Faktoren aus. Zur Modellierung dieser Abhängigkeiten verwendet man einen weiteren als *Faktorprozess* bezeichneten stochastischen Prozess, von dem die Koeffizienten der SDE (1.13) abhängen können.

Der Faktorprozess $(Y_t)_{t \in [0, T]}$ wird in dieser Arbeit mittels einer *homogenen Markov-Kette*

in stetiger Zeit mit endlich vielen Zuständen modelliert, d.h.

$$Y_t : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow E_d, \quad E_d = \{e_1, \dots, e_d\} \subset \mathbb{R}^d,$$

wobei $e_i \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, \dots, d$, Einheitsvektoren sind. Solche Modelle heißen auch *Regime Switching Modelle*.

Die Markov-Kette wird durch die Anfangsverteilung $p_0 = (p_0^1, \dots, p_0^d)^\top$ mit $p_0^i = \mathbb{P}(Y_0 = e_i)$, $i = 1, \dots, d$, und die Generatormatrix $\bar{\Lambda} = (\lambda_{ij})$ definiert. Dabei sind $\lambda_{ii} = -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^d \lambda_{ik} < 0$,

$\lambda_{ij} \geq 0$, $i \neq j$, mit $\mathbb{P}(Y_t = e_k \mid Y_{t-} = e_i) = -\frac{\lambda_{ik}}{\lambda_{ii}}$ die Übergangsintensitäten λ_{ij} der Markov-Kette vom i -ten zum j -ten Zustand (siehe Elliott, Aggoun u. Moore [22, Abschnitt 7.2]).

Als Erweiterung des in (1.13) formulierten Modells für $(S_t)_{t \in [0, T]}$ wird nun folgende Preisprozessgleichung mit dem Faktorprozess $(Y_t)_{t \in [0, T]}$ betrachtet:

$$dS_t = a_S(S_t, Y_t)dt + b_S(S_t)dW_t^S, \quad S_0 = s_0, \quad (1.15)$$

wobei die Funktionen $a_S(s, e_i)$ für den Marktzustand $Y_t(\omega) = e_i$, $i = 1, \dots, d$, deterministisch sind und dem Speichermanager bekannt. Somit gilt

$$a_S(S_t, Y_t) = \sum_{i=1}^d a_t^i \mathbf{1}_{\{Y_t=e_i\}} = \langle a_t, Y_t \rangle, \quad a_t^i = a_S(S_t, e_i),$$

wobei $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d x_i y_i$ für $x, y \in \mathbb{R}^d$ das Euklidische Skalarprodukt im \mathbb{R}^d bezeichnet.

Es wird angenommen, dass die Koeffizienten $a_S : \mathcal{S} \times E_d \rightarrow \mathbb{R}$ und $b_S(s) \geq \underline{b}_s > 0$ in der SDE (1.15) für alle $(s, e) \in \mathcal{S} \times E_d$ der Wachstumsbedingung und für jedes $e_i \in E_d$, $i = 1, \dots, d$, bezüglich s der Lipschitz-Bedingung (1.2) bzw. (1.3) der Annahme 1.1.2 genügen. Dann hat die SDE (1.15) eine *eindeutige starke Lösung* (siehe Fleming u. Rishel [25, Theorem 4.1], Liptser u. Shiryaev [49, Theorem 4.6], Øksendal [51, Theorem 5.2.1]).

Ein im weiteren Verlauf der Arbeit häufig verwendetes Beispiel für einen Energiepreisprozess in der Form (1.15) ist der Markov-modulierte OU-Prozess. Dieser entsteht, wenn im Modell (1.14) für den Standard-OU-Prozess die konstanten Driftparameter μ und κ durch von der Markov-Kette $(Y_t)_{t \in [0, T]}$ abhängige Parameter ersetzt werden. Dann ergibt sich die SDE

$$dS_t = \kappa(Y_t)(\mu(Y_t) - S_t)dt + \sigma dW_t^S, \quad S_0 = s_0, \quad (1.16)$$

mit einer in s linearen Drift $a_S(s, e_i) = \kappa(e_i)(\mu(e_i) - s)$ und einem konstanten Diffusionskoeffizienten $b_S(e_i) = \sigma$. Es bezeichne $\mu_i = \mu(e_i)$, $\kappa_i = \kappa(e_i)$ und $a_t^i = a_S(S_t, e_i) = \kappa_i(\mu_i - S_t)$, $i = 1, \dots, d$. Derartige Modelle werden auch in Bäuerle u. Riess [6] und Erlwein, Benth u. Mamon [24] betrachtet.

Bemerkung 1.1.6. Der Einfachheit halber werden in dieser Arbeit keine deterministischen Effekte in den Energiepreisen berücksichtigt, da der Schwerpunkt auf den Auswirkungen der durch die stochastischen Terme modellierten Unsicherheiten über den zukünftigen Preisverlauf liegt.

Saisonale Effekte können im vorgestellten Preismodell berücksichtigt werden, wenn die Koeffizienten der SDE (1.15) zusätzlich eine explizite Abhängigkeit von der Zeit aufweisen. Mit Blick auf die in der Literatur verwendeten Preismodelle mit einer saisonalen Komponente (siehe z.B. Chen u. Forsyth [12, Abschnitt 2.2], [13, Kapitel 9, Abschnitt 2.2], Thompson, Davison u. Rasmussen [69, Abschnitt 3] und Zhao u. Davison [75, Abschnitt 4]) bietet es sich z.B. an, im Fall des in (1.16) betrachteten Markov-modulierten OU-Prozesses den Driftkoeffizienten in der Form

$$a_S(t, S_t, Y_t) = \kappa(Y_t)(\bar{\mu}(t, Y_t) - S_t) \quad \text{mit} \quad \bar{\mu}(t, Y_t) = \mu(Y_t) + K(t)$$

zu wählen. Dabei ist $K : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte deterministische Funktion zur Beschreibung der saisonalen Schwankungen der mittleren Energiepreise. Eine typische Wahl für K ist eine periodische Funktion (oder eine Linearkombination mehrerer periodischer Funktionen) in der Form

$$K(t) = K_S \cos(2\pi\delta_S^{-1}(t - t_S)) .$$

Dabei bezeichnen K_S die Amplitude des saisonalen Effektes, δ_S dessen Periodenlänge und t_S einen Referenzzeitpunkt, welcher die Lage des (ersten) Maximums in der durch K beschriebenen Saisonfigur beschreibt.

Natürlicher Zufluss

Zur Modellierung eines *natürlichen Zuflusses* Z_t in das obere Speicherbecken durch Fließgewässer wird ein Diffusionsprozess in der Form

$$dZ_t = a_Z(Z_t)dt + b_Z(Z_t)dW_t^Z, \quad Z_0 = z_0, \quad (1.17)$$

mit dem Anfangszufluss $z_0 \in \mathcal{Z}$, $\mathcal{Z} \subset \mathbb{R}$, eingesetzt, dessen Koeffizienten $a_Z : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ und $b_Z(z) \geq \underline{b}_Z > 0$ für alle $z \in \mathcal{Z}$ der Wachstums- und Lipschitz-Bedingung (1.2) bzw. (1.3) der Annahme 1.1.2 genügen. Zudem wird angenommen, dass für das zweite Moment des Zuflusses (1.17) für alle $(t, z) \in [0, \infty) \times \mathcal{Z}$ folgende Abschätzung mit einer von t unabhängigen Konstante $C_z > 0$ gilt

$$\mathbb{E}[(Z_t^{r,z})^2] \leq C_z(1 + z^2), \quad Z_r = z, \quad (1.18)$$

welche besagt, dass das zweite Moment des Zuflusses (1.17) zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, \infty)$ durch eine vom Anfangswert z abhängige Konstante beschränkt ist.

Bemerkung 1.1.7. In der Praxis kann die Drift a_Z der stochastischen Differentialgleichung (1.17) jedoch gewisse jahreszeitliche Saisonalitäten (z.B. Schneeschmelze im Frühjahr und Trockenheit im Sommer) enthalten, welche z.B. durch eine deterministische Funktion im Driftterm $a_Z(t, z)$ beschrieben werden können. Ein einfaches Modell dafür ist ein Mean-Reversion-Prozess der Form

$$dZ_t = \kappa_Z(\mu_Z(t) - Z_t)dt + \sigma_Z dW_t^Z, \quad Z_0 = z_0,$$

mit der Steifigkeit $\kappa_Z > 0$, der saisonalen Komponente $\mu_Z : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ und der Volatilität $\sigma_Z > 0$. Hierbei ist $Z_t \in \mathcal{Z} = \mathbb{R}$. Dieser Prozess kann sowohl positive als auch negative Werte annehmen. Negative Werte beschreiben z.B. die Verdunstung des im Speicher befindlichen

Wassers in den warmen Sommertagen. Als Alternative dazu bietet sich die Verwendung des exponentiellen Prozesses $(\tilde{Z}_t)_{t \in [0, T]}$ mit $\tilde{Z}_t = \exp(Z_t) \in \mathcal{Z} = \mathbb{R}^+$ an, für den die negativen Werte des Zuflusses ausgeschlossen sind.

Beobachtungsfiltration

Es wird angenommen, dass der Speichermanager den Faktorprozess $Y = (Y_t)_{t \in [0, T]}$, welcher ein an die Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ adaptierter und von den Wiener-Prozessen $W^S = (W_t^S)_{t \in [0, T]}$ und $W^Z = (W_t^Z)_{t \in [0, T]}$ unabhängiger stochastischer Prozess ist, nicht direkt beobachten kann. Jedoch sind ihm die Anfangsverteilung p_0 der Markov-Kette Y , die Generatormatrix $\bar{\Lambda}$ und die Funktionen $a_S(s, e_i)$ für den Marktzustand $Y_t(\omega) = e_i, i = 1, \dots, d$, bekannt. Insbesondere kennt er die Werte μ_i und $\kappa_i, i = 1, \dots, d$, des Gleichgewichtsniveaus bzw. der Steifigkeit, wenn der Energiepreisprozess S ein Markov-modulierter OU-Prozess (1.16) ist. Außerdem beobachtet der Speichermanager unmittelbar den Preisprozess S und den Zufluss Z , aber nicht die Wiener-Prozesse W^S und W^Z , sowie das Gleichgewichtsniveau μ und die Steifigkeit κ . Bei diesem Modell handelt es sich somit um eines mit *partieller Information*. Hierbei ist die für den Speichermanager zugängliche Information durch die *Beobachtungsfiltration* $\mathbb{F}^{S, Z} = (\mathcal{F}_t^S \vee \mathcal{F}_t^Z)_{t \in [0, T]}$ mit den σ -Algebren $\mathcal{F}_t^S = \sigma\{S_u, u \leq t\}$ und $\mathcal{F}_t^Z = \sigma\{Z_u, u \leq t\}$ gegeben, welche vom Preisprozess S und vom Zufluss Z generiert wird. In einem Modell, in dem der Zustand des Kontrollsystems keinen Zufluss enthält, wird die Beobachtungsfiltration $\mathbb{F}^S = (\mathcal{F}_t^S)_{t \in [0, T]}$ mit $\mathcal{F}_t^S = \sigma\{S_u, u \leq t\}$ nur vom Energiepreis S generiert. Für weitere Erläuterungen zur Beobachtungsfiltration verweisen wir auf Bemerkung 1.1.10 (siehe Seite 20).

Bemerkung 1.1.8. Wenn der Diffusionskoeffizient b_S in (1.15) auch vom Faktorprozess Y abhängig ist, so kann man ihn aus der quadratischen Variation des Preisprozesses S rekonstruieren, sodass er direkt beobachtbar ist. Als Resultat entsteht ein Modell unter voller Information (siehe Bäuerle u. Rieder [4], Pham u. Quenez [54, Lemma 3.1]).

Füllstand

Der *Füllstand* des Speichers wird durch die Höhe Q_t in m des zur Zeit t über der Turbine befindlichen Wassers beschrieben. Änderungen des Füllstandes Q_t werden durch Ablassen oder Füllen von Wasser und den natürlichen Zufluss hervorgerufen. Die Stärke des Ablassens und Füllens kann der Speichermanager durch die Wahl der *Rate des Volumenstromes* u_t in m^3/s beeinflussen. Der Prozess $(u_t)_{t \in [0, T]}$ wird nachfolgend als Steuerung bezeichnet. Für die Rate des Volumenstromes u_t wird folgende Vorzeichenkonvention vereinbart:

- $u_t > 0$ im Falle des *Ausströmens*, wenn das Wasser von dem oberen Speicherbecken in das untere Reservoir abgelassen wird;
- $u_t < 0$ im Falle des *Einströmens*, wenn das Wasser von dem unteren Reservoir in das obere Speicherbecken gepumpt wird;
- $u_t = 0$, wenn das Wasser weder abgelassen noch gepumpt wird.

Die beschränkte Kapazität des Speichers impliziert, dass der Füllstand Q_t zu jedem Zeitpunkt t einer Zustandsbeschränkung

$$Q_t \in \mathcal{Q} := [\underline{q}, \bar{q}], \quad \underline{q} > 0,$$

genügt, wobei \underline{q} und \bar{q} den minimalen bzw. maximalen Füllstand des oberen Speicherbeckens bezeichnen (siehe Abbildung 1.1).

Die Auswahl der Steuerung u_t und des Zuflusses Z_t verursacht die unmittelbaren Änderungen der Menge des im oberen Speicherbecken enthaltenen Wassers. Diese kann wahlweise über dessen Volumen V^w (m^3) oder über den zugehörigen Füllstand Q_t beschrieben werden. Die Änderung des Volumens im Zeitintervall $[t, t + dt]$ ergibt sich aus den Raten der Volumenströme u_t für die Speicherung und Z_t für den Zufluss. Hierbei muss man darauf achten, dass beim leeren Speicher ($q = \underline{q}$) und negativen Zufluss ($z < 0$) er nicht mehr weiter entleert werden kann, sowie bei vollem Speicher ($q = \bar{q}$) und positivem Zufluss ($z > 0$) dieser nicht weiter befüllt werden kann. Um dies zu erreichen, werden zustandsabhängige Beschränkungen an die Steuerung u_t eingeführt (siehe unten in (1.23)) und anstelle von Z_t ein zustandsabhängiger effektiver Zufluss $g_Z(Q_t, Z_t)$ betrachtet. Dabei ist

$$g_Z(q, z) = I_+(q, z) \cdot I_-(q, z) \cdot z \quad (1.19)$$

mit

$$I_+(q, z) = 1 - e^{-\check{\beta}(\bar{q}-q)} \mathbf{1}_{\{z \geq 0\}}, \quad I_-(q, z) = 1 - e^{-\check{\beta}(q-\underline{q})} \mathbf{1}_{\{z < 0\}}, \quad (1.20)$$

wobei $\check{\beta} > 0$ eine positive Konstante ist. Die Funktion g_Z modelliert die effektive Rate des Zuflusses in Abhängigkeit vom Füllstand des oberen Speicherbeckens.

Die Änderung des Volumens des oberen Speicherbeckens lässt sich somit mit der folgenden gewöhnlichen Differentialgleichung (ODE) darstellen:

$$dV_t^w = c_P(-u_t + g_Z(Q_t, Z_t))dt,$$

wobei $c_P = 3600 \cdot 24 \cdot 365 \text{ s/a}$ ein Umrechnungsfaktor ist, der die Sekunden in Jahre überführt, mit dem berücksichtigt wird, dass die Zeit t in Jahren (a) und die Zuflussraten in m^3/s gemessen werden.

Hieraus erhält man die Dynamik des Füllstandes Q_t unter Verwendung der Beziehung $dV_t^w = A(Q_t)dQ_t$. Dabei bezeichnet $A(q)$ die Querschnittsfläche des oberen Speicherbeckens zum Füllstand q in m^2 (siehe Abbildung 1.1), wobei $A(q)$ eine stetige und (typischerweise nicht-fallende) Funktion von q ist, für die außerdem Lipschitz-Bedingung gilt:

$$|A(q_1) - A(q_2)| \leq C|q_1 - q_2|, \quad C > 0.$$

Somit ergibt sich für die Änderungen im Füllstand Q_t folgende ODE:

$$dQ_t = \psi(Q_t, Z_t, u_t) dt, \quad Q_0 = q_0, \quad (1.21)$$

mit $\psi(q, z, y) = \mathfrak{h}(q)(-y + g_Z(q, z))$ und $\mathfrak{h}(q) = \frac{c_P}{A(q)}$.

Es sei bemerkt, dass mit der obigen Wahl der Funktion g_Z in (1.19) der Driftkoeffizient $\psi(q, z, y)$ der ODE (1.21) für alle Steuerungswerte y der Lipschitz-Bedingung genügt:

$$|\psi(q_1, z_1, y) - \psi(q_2, z_2, y)| \leq C(|q_1 - q_2| + |z_1 - z_2|), \quad \forall (q_1, z_1), (q_2, z_2) \in \mathcal{Q} \times \mathcal{Z}, \quad C > 0.$$

Bemerkung 1.1.9. Für eine konstante Querschnittsfläche $A(q) \equiv A_S$ und in einem Modell ohne Zufluss ($Z \equiv 0$) reduziert sich ψ in (1.21) auf eine lineare Funktion von y mit einem von q unabhängigen Koeffizienten:

$$\psi(q, y) = -\mathfrak{h} \cdot y, \quad \mathfrak{h} = \frac{c_P}{A_S}. \quad (1.22)$$

Steuerung

Wie bereits erwähnt, wird die Rate des Volumenstromes als *Steuerungsprozess* $u = (u_t)_{t \in [0, T]}$ verstanden. Dabei wird angenommen, dass die Werte dieser Rate in der *Menge der zulässigen Steuerungswerte* (Volumenstromraten)

$$U(q) := [\underline{u}(q), \bar{u}(q)], \quad \forall q \in \mathcal{Q}, \quad (1.23)$$

angenommen werden, welche vom momentanen Füllstand $Q_t = q$ zur Zeit t abhängt. Dabei sind $\underline{u}(q) \leq 0$ und $\bar{u}(q) \geq 0$ die minimalen bzw. maximalen Raten des Volumenstromes beim Einströmen bzw. Ausströmen für alle $q \in \mathcal{Q}$. Diese hängen von der physikalisch maximal möglichen Rate des Volumenstromes ab, welche nachfolgend betrachtet werden.

Die *physikalisch maximal mögliche Rate des Volumenstromes* $\bar{u}_0(q)$ im Falle des *Ausströmens* bei gegebenem Füllstand q ergibt sich aus der Auslassgeschwindigkeit v_{out} , die in m/s gemessen wird, multipliziert mit der Querschnittsfläche A_{out} in m² der Ausströmöffnung (siehe Abbildung 1.1), d.h. $\bar{u}_0(q) = v_{\text{out}} A_{\text{out}}$. Die Beziehung für die Auslassgeschwindigkeit ergibt sich aus der Torricelli- bzw. Bernoulli-Gleichung (siehe Thompson, Davison u. Rasmussen [69, Abschnitt 4]):

$$v_{\text{out}} = \sqrt{2gq},$$

wobei $g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$ die Erdbeschleunigung ist.

Daraus folgt unmittelbar der Ausdruck für die physikalisch maximal mögliche Rate des Volumenstromes:

$$\bar{u}_0(q) = A_{\text{out}} \sqrt{2gq}. \quad (1.24)$$

Die *physikalisch maximal mögliche Rate des Volumenstromes* $-\underline{u}_0(q)$ im Falle des *Einströmens* ist von der Nennleistung der Pumpe P_{pump} in MW und ihrem Wirkungsgrad $\eta_{\text{pump}} \in [0, 1]$ abhängig. Die Pumpe wandelt mit der konstanten Leistung $\eta_{\text{pump}} P_{\text{pump}}$ die vom Netz aufgenommene elektrische Energie in kinetische Energie des durch sie strömenden Wassers um. Die kinetische Energie wird schließlich mit der von dem laufenden Füllstand q abhängigen Rate $-c_0(q + q_f^-)\underline{u}_0(q)$ in potentielle Energie des im oberen Speicherbecken befindlichen Wassers umgewandelt. Dabei ist $c_0 = 10^{-6} \rho_w g$ eine Konstante, $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$ die Dichte des Wassers. Der Faktor 10^{-6} dient der Umrechnung von W in MW. Dissipative Verluste durch

die Reibung des fließenden Wassers an den Rohrwänden werden gemäß der Darcy-Weisbach-Gleichung durch Korrektur des Füllstandes um den Wert q_f^- in m berücksichtigt (siehe Zhao u. Davison [75, Abschnitt 2]).

Aus der Gleichheit beider Leistungen lässt sich die physikalisch maximal mögliche Rate des Volumenstromes erhalten:

$$-\underline{u}_0(q) = \frac{\eta_{\text{pump}} P_{\text{pump}}}{c_0(q + q_f^-)}. \quad (1.25)$$

Gewöhnlich wird das Wasser ausschließlich mit maximaler Leistung der Pumpe P_{pump} , d.h. mit der Rate $\underline{u}_0(q)$ des Volumenstromes, gepumpt. Bei der nachfolgenden Behandlung des Steuerungsproblems für den Pumpspeicher wird es mathematisch bequemer sein, auch Raten y zwischen $\underline{u}_0(q)$ und 0 zuzulassen. Unter der Annahme eines konstanten Wirkungsgrades η_{pump} wird die Pumpe dann mit der Leistung $y/\underline{u}_0(q) \cdot P_{\text{pump}}$ betrieben. Im Abschnitt 1.2.3 wird gezeigt, dass die optimalen Steuerungen durch diese Modellerweiterung nicht beeinflusst werden (siehe Bemerkung 1.2.9). So wird die optimale Steuerung niemals Werte aus dem Inneren des Intervalls $[\underline{u}_0(q), 0]$ annehmen, d.h. wenn Pumpen optimal ist, dann wird mit maximal möglicher Leistung gepumpt.

Außerdem muss man garantieren, dass der von der Wahl des Volumenstromes abhängige Füllstand, welcher die Lösung der ODE (1.21) ist, zum jedem Zeitpunkt t den oben eingeführten speicherspezifischen Kapazitätsrestriktionen $Q_t \in [\underline{q}, \bar{q}]$ genügt. Um dies zu erreichen, muss der Driftkoeffizient ψ in der ODE (1.21) an den Rändern $q = \underline{q}$ und $q = \bar{q}$ der Menge \mathcal{Q} in Hinblick auf die effektive Zuflussrate (1.19) den Bedingungen

$$\begin{aligned} \psi(\underline{q}, z, y) &\geq 0 \quad \forall z \in \mathcal{Z}, \quad \forall y \in \mathcal{U}(\underline{q}), \\ \psi(\bar{q}, z, y) &\leq 0 \quad \forall z \in \mathcal{Z}, \quad \forall y \in \mathcal{U}(\bar{q}), \end{aligned} \quad (1.26)$$

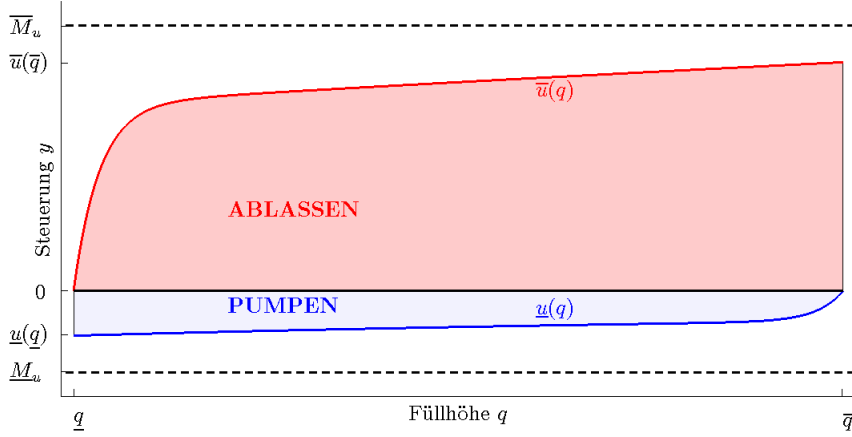
genügen, welche nur dann erfüllt sind, wenn für die maximale und minimale Rate des Volumenstromes \bar{u} bzw. \underline{u} die Reflexionsbedingung $\bar{u}(\underline{q}) = \underline{u}(\bar{q}) = 0$ gilt. Diese Forderung wird z.B. dann erfüllt, wenn die in (1.24) und (1.25) eingeführten physikalisch maximalen Raten des Volumenstromes $\bar{u}_0(q) > 0$ und $\underline{u}_0(q) < 0$ so abgeändert werden, dass $\bar{u}_0(q)$ für $q \rightarrow \underline{q}$ und $\underline{u}_0(q)$ für $q \rightarrow \bar{q}$ glatt in 0 übergehen. Dies wird z.B. durch Multiplikation mit einer Glättungsfunktion in der Form

$$\underline{u}(q) = \underline{u}_0(q)(1 - e^{-\tilde{\alpha}(\bar{q}-q)}), \quad \bar{u}(q) = \bar{u}_0(q)(1 - e^{-\tilde{\alpha}(q-\underline{q})}), \quad (1.27)$$

erreicht, wobei $\tilde{\alpha} > 0$ eine positive Konstante ist.

Die angegebene Glättung der physikalisch maximalen möglichen Raten des Volumenstromes $\bar{u}_0(q)$ und $\underline{u}_0(q)$ ist nicht nur mathematisch bequem, sondern auch aus praktischer Sicht sinnvoll. So wird der Zufluss in das obere Speicherbecken bei Erreichen der Kapazitätsgrenzen stetig reduziert und schließlich gestoppt.

Die Abbildung 1.2 stellt die Menge der zulässigen Steuerungswerte dar. Nach Konstruktion von $\bar{u}(q)$ und $\underline{u}(q)$ lassen sich stets die Konstanten $\underline{M}_u < 0$ und $\bar{M}_u > 0$ finden, sodass die kompakte Menge $\mathcal{U}_M = [\underline{M}_u, \bar{M}_u]$ die Intervalle $\mathcal{U}(q)$ aus (1.23) für alle Füllhöhen q enthält, d.h. es gilt $\underline{M}_u < \underline{u}(q) \leq 0 \leq \bar{u}(q) < \bar{M}_u$ für alle $q \in [\underline{q}, \bar{q}]$.


 Abbildung 1.2: Die Menge der zulässigen Steuerungswerte $U(q)$.

1.1.3 Stochastisches optimales Steuerungsproblem mit partieller Information

Die im Abschnitt 1.1.2 eingeführten Komponenten, die die Dynamik des Pumpspeichers beschreiben, ermöglichen nun ein stochastisches Optimalsteuerungsproblem mit dreidimensionalem Zustandsprozess (Q^u, S, Z) aufzustellen, der nach (1.15)-(1.17) und (1.21) wie folgt definiert wird:

$$\begin{aligned} dQ_t^u &= \psi(Q_t^u, Z_t, u_t) dt, & Q_0^u &= q_0, \\ dS_t &= a_S(S_t, Y_t)dt + b_S(S_t)dW_t^S, & S_0 &= s_0, \\ dZ_t &= a_Z(Z_t)dt + b_Z(Z_t)dW_t^Z, & Z_0 &= z_0. \end{aligned}$$

Hierbei sei auch bemerkt, dass nur der Füllstand Q_t des Speichers gesteuert wird. Darum schreibt man auch Q_t^u anstelle Q_t , um diese Abhängigkeit zu verdeutlichen.

Die Optimierungsaufgabe für den Pumpspeicher besteht in der Maximierung einer reellwertigen Zielfunktion $J_0 : [0, T] \times \mathcal{Q} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ (siehe die Zielfunktion (1.8))

$$\begin{aligned} J_0(t, q, s, z; u) &= \mathbb{E} \left[\int_t^T e^{-\rho(r-t)} F(Q_r^u, S_r, u_r) dr \right. \\ &\quad \left. + e^{-\rho(T-t)} \Phi(Q_T^u, S_T) \mid Q_t^u = q, S_t = s, Z_t = z \right]. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Sie definiert den in EUR angegebenen erwarteten Barwert und enthält die Funktionen für den durch die Energieproduktion bzw. den Energieverbrauch entstehenden laufenden Gewinn $F(q, s, y)$ in EUR/a und für die von dem Füllstand Q_T^u und dem Energiepreis S_T abhängige Endauszahlung $\Phi(q, s)$ in EUR zum Zeitpunkt T . Es sei bemerkt, dass die Funktionen F und Φ vom Zufluss z unabhängig sind. Es wird angenommen, dass für alle $(q, s) \in \mathcal{Q} \times \mathcal{S}$ und alle Steuerungswerte $y \in U_M$ aus der kompakten Menge $U_M = [\underline{M}_u, \overline{M}_u]$ die Gewinn- und die Endauszahlungsfunktion $F : \mathcal{Q} \times \mathcal{S} \times U_M \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\Phi : \mathcal{Q} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ der Wachstums- und Lipschitz-Bedingung (1.4) bzw. (1.5) der Annahme 1.1.3 genügen. Am Ende des Abschnitts erfolgt eine

detaillierte Beschreibung der Funktionen F und Φ für das betrachtete Optimierungsproblem für einen Pumpspeicher.

Die Maximierung der Zielfunktion (1.28) erfolgt über alle Steuerungen $u \in \mathcal{U}(t, q, s, z)$ der Menge der zulässigen Markov-Steuerungsprozesse (siehe die Menge (1.7))

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(t, q, s, z) = & \left\{ u = (u_r)_{r \in [t, T]} \mid u \text{ ist } \mathbb{F}^{S, Z} - \text{progressiv messbar,} \right. \\ & u_r = w(r, Q_r^u, S_r, Z_r) \text{ und } w(r, q, s, z) \in U(q), \forall (r, q, s, z) \in [t, T] \times \mathcal{Q} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Z}, \\ & \left. \mathbb{E} \left[\int_t^T e^{-\rho(r-t)} |F(Q_r^u, S_r, u_r)| dr + e^{-\rho(T-t)} |\Phi(Q_T^u, S_T)| \mid Q_t^u = q, S_t = s, Z_t = z \right] < \infty \right\}, \end{aligned}$$

wobei $w : [0, T] \times \mathcal{Q} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Borelfunktion ist.

Bemerkung 1.1.10. Mit der $\mathbb{F}^{S, Z}$ -progressiven Messbarkeit der zulässigen Steuerungen wird sichergestellt, dass die Entscheidungen des Speichermanagers nur von beobachtbaren Größen und deren Werten bis zum aktuellen Zeitpunkt abhängen dürfen. Im betrachteten Kontrollsystem sind dies der Füllstand Q^u , der Energiepreis S und der Zufluss Z . Da Q^u der (deterministischen) ODE (1.21) mit einem von Q^u , S , Z und u abhängigen Driftkoeffizienten ψ genügt, folgt für Markov-Steuerungen u , dass $\mathbb{F}^Q \subset \mathbb{F}^{S, Z}$ und folglich $\mathbb{F}^{Q, S, Z} \subset \mathbb{F}^{S, Z}$ gilt. Somit genügt es, u als progressiv messbar bezüglich der Beobachtungsfiltration $\mathbb{F}^{S, Z}$ zu fordern.

Ausgehend vom allgemeinen stochastischen optimalen Steuerungsproblem (1.9) kann das Optimierungsproblem für einen Energiespeicher wie folgt formuliert werden: Finde eine zulässige Steuerung $u^* \in \mathcal{U}(t, q, s, z)$ mit $V_0(t, q, s, z) = J_0(t, q, s, z; u^*)$ für alle $(t, q, s, z) \in [0, T] \times \mathcal{Q} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Z}$, sodass die Zielfunktion J_0 in (1.28) maximal wird:

$$V_0(t, q, s, z) = \sup_{u \in \mathcal{U}(t, q, s, z)} J_0(t, q, s, z; u). \quad (1.29)$$

Falls diese Steuerung u^* existiert, dann heißt sie optimale Speicherstrategie.

Die Wertfunktion $V_0 : [0, T] \times \mathcal{Q} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ der Form (1.29) beschreibt den ökonomischen Wert des Energiespeichers und kann auch als Preis einer entsprechenden Realoption interpretiert werden. Die optimale Steuerung u^* liefert dem Speichermanager die zur Erzielung des maximalen erwarteten diskontierten Gewinns notwendige Speicherstrategie. Diese gibt zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ an, mit welcher Rate des Volumenstromes der Speicher zu füllen bzw. zu leeren ist.

Das oben eingeführte Steuerungsproblem kann auch auf einem *unendlichen* Zeithorizont ($T = \infty$) betrachtet werden. Solche Aufgaben sind einerseits von eigenständigem mathematischen Interesse und dienen andererseits zur Approximation der Wertfunktion und der optimalen Steuerung im Falle eines endlichen aber sehr großen Zeithorizontes T .

In diesem Falle definiert man die Zielfunktion $J_0 : \mathcal{Q} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ wie in (1.10):

$$J_0(q, s, z; u) = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\rho t} F(Q_t^u, S_t, u_t) dt \mid Q_0^u = q, S_0 = s, Z_0 = z \right] \quad (1.30)$$

für alle $(q, s, z) \in \mathcal{Q} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Z}$ und $u \in \mathcal{U}(q, s, z)$. Mit

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(q, s, z) = & \left\{ u = (u_t)_{t \in [0, \infty)} \mid u \text{ ist } \mathbb{F}^{S, Z} \text{-progressiv messbar,} \right. \\ & u_t = w(Q_t^u, S_t, Z_t) \text{ für alle } t \in [0, \infty) \text{ und } w(q, s, z) \in U(q), \forall (q, s, z) \in \mathcal{Q} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Z}, \\ & \left. \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\rho t} |F(Q_t^u, S_t, u_t)| dt \mid Q_0^u = q, S_0 = s, Z_0 = z \right] < \infty \right\} \end{aligned}$$

wird wie in (1.11) die Menge der zulässigen, $\mathbb{F}^{S, Z}$ -adaptierten Markov-Steuerungsprozesse auf $[0, \infty)$ bezeichnet, wobei $w : \mathcal{Q} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Borelfunktion ist.

Das Optimierungsproblem für einen Pumpspeicher wird dann analog zu (1.12) folgendermaßen formuliert: Finde eine zulässige Steuerung $u^* \in \mathcal{U}(q, s, z)$ mit $V_0(q, s, z) = J_0(q, s, z; u^*)$ für alle $(q, s, z) \in \mathcal{Q} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Z}$, sodass die Zielfunktion J_0 in (1.30) maximal wird:

$$V_0(q, s, z) = \sup_{u \in \mathcal{U}(q, s, z)} J_0(q, s, z; u). \quad (1.31)$$

Die gestellten Optimierungsprobleme (1.29) und (1.31) mit endlichem bzw. unendlichem Zeithorizont, für welche der Steuerungsprozess u an die Beobachtungsfiltration $\mathbb{F}^{S, Z}$ adaptiert ist, nennt man *stochastische Optimalsteuerungsprobleme mit partieller Information*, da der den Faktorprozess Y enthaltene Driftkoeffizient a_S in der Preisprozessgleichung (1.15) nicht $\mathbb{F}^{S, Z}$ -adaptiert, sondern nur an eine größere Filtration \mathbb{F} adaptiert ist. Im Abschnitt 1.2.1 wird gezeigt, wie die Probleme (1.29) und (1.31) unter Verwendung von Filtern auf Optimalsteuerungsprobleme mit voller Information transformiert werden können.

Zuvor sollen die Funktionen F und Φ für die laufenden bzw. Endgewinne bzw. Endkosten genauer beschrieben werden.

Laufender Gewinn

Die Zielfunktion des optimalen Steuerungsproblems für einen Pumpspeicher bewertet den durch den Kauf und den Verkauf von Energie entstehenden Zahlungsstrom. Hierbei wird im vorliegenden Modell angenommen, dass die von den Turbinen produzierte und in das Netz eingespeiste, bzw. die von dort für das Pumpen entnommene elektrische Energie mit dem Spotpreis S_t vergütet wird, bzw. zu bezahlen ist. Denkbar sind natürlich noch gewisse Transaktionskosten, welche über einen „bid price“ $h_-(S_t) < S_t$ beim Verkauf und „ask price“ $h_+(S_t) > S_t$ beim Kauf modelliert werden können (siehe Bäuerle u. Riess [6, Abschnitt 2]). Hierauf wird im betrachteten Modell des Pumpspeichers verzichtet, da „technische Transaktionskosten“ durch die Berücksichtigung der Verluste infolge der Rohrreibung und der Wirkungsgrade der Turbine und der Pumpe im Modell erfasst werden.

Für die nachfolgende Bestimmung des laufenden Zahlungsstroms wird die von der Turbine ins Elektrizitätsnetz abgegebene Leistung bzw. die von der Pumpe aus dem Elektrizitätsnetz aufgenommene Leistung mit dem Energiepreis multipliziert. Um die Größe dieser Leistung zu bestimmen, ist es notwendig, einige technisch-physikalische Details der Energieerzeugung bzw. -umwandlung zu betrachten.

Das Prinzip der Energiegewinnung besteht in der Umwandlung der potentiellen Energie (Lageenergie) des im oberen Speicherbecken befindlichen Wassers in elektrische Energie. Dabei erfolgt in einem Zwischenschritt ihre Umwandlung in kinetische Energie (Bewegungsenergie) des durch die Turbine fließenden Wassers. Bei beiden Umwandlungen treten Verluste durch die Rohrreibung und den Wirkungsgrad der Turbine auf.

Das im Zeitintervall $[t, t + dt]$ mit der Rate des Volumenstromes $u_t > 0$ durch die Turbine strömende Wasser hat ein Volumen von $dV_t^w = u_t dt$ in $\text{m}^3 \cdot \text{s}$. Es enthält eine nutzbare potentielle Energie W_{pot} , welche proportional zum Füllstand Q_t^u ist. Es gilt dann

$$W_{\text{pot}} = c_0 Q_t^u dV_t^w = c_0 Q_t^u u_t dt.$$

Bei der Umwandlung in kinetische Energie entstehen Reibungsverluste, welche nach der Darcy-Weisbach-Gleichung in guter Näherung durch eine Verringerung des Füllstandes um die Verlusthöhe q_f^+ in m ausgedrückt werden können. Es gilt dann für den Reibungsverlust an Energie

$$W_f = c_0 q_f^+ u_t dt,$$

und damit für die zur Energiegewinnung nutzbare kinetische Energie

$$W_{\text{kin}} = W_{\text{pot}} - W_f = c_0 (Q_t^u - q_f^+) u_t dt.$$

Die im Zeitintervall $[t, t + dt]$ erzeugte elektrische Energie W_{el} ist einerseits gleich der kinetischen Energie W_{kin} des durch die Turbine strömenden Wassers multipliziert mit dem Wirkungsgrad der Turbine $\eta_{\text{turb}} \in [0, 1]$, d.h.

$$W_{\text{el}} = \eta_{\text{turb}} W_{\text{kin}} = \eta_{\text{turb}} c_0 (Q_t^u - q_f^+) u_t dt.$$

Andererseits ergibt sie sich aus der von der Turbine im Zeitintervall dt abgegebenen Leistung P_{turb} in MW, d.h. $W_{\text{el}} = P_{\text{turb}} dt$. Damit gilt

$$P_{\text{turb}} = \eta_{\text{turb}} c_0 (Q_t^u - q_f^+) u_t. \quad (1.32)$$

Zur Beschreibung des Wirkungsgrades der Turbine wird die folgende in Thompson, Davison u. Rasmussen [69, Abschnitt 4] und Zhao u. Davison [75, Abschnitt 2] vorgeschlagene in (q, y) quadratische Funktion verwendet:

$$\eta_{\text{turb}} = \eta_{\text{turb}}(q, y) = \eta_{\text{max}} \left(1 - \left(\frac{c_0 y q}{P_{\text{theo}}} - 1 \right)^2 \right), \quad (1.33)$$

wobei $\eta_{\text{max}} \in [0, 1]$ der maximal erreichbare Wirkungsgrad der Turbine und P_{theo} die „theoretische Leistung“ der Turbine in MW. Diese Funktion ermöglicht es, die in der ingenieurtechnischen Literatur mit Hilfe von Kennlinien beschriebene Abhängigkeit des Turbinenwirkungsgrades von der Durchflussgeschwindigkeit des Wassers und der Höhe des über der Turbine befindlichen Wassers mathematisch zu modellieren. Insbesondere wird damit die Verringerung des Wirkungsgrades für sehr große Durchflussgeschwindigkeit und Wasserhöhen erfasst.

Um mit dem in (1.33) vorgestellten Modell für den Wirkungsgrad der Turbine η_{turb} stets nichtnegative Werte zu erhalten, müssen die Grenzen für q und y so gewählt werden, dass folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\left(\frac{c_0 y q}{P_{\text{theo}}} - 1\right)^2 \leq 1,$$

woraus unmittelbar

$$P_{\text{theo}} \geq \frac{c_0 y q}{2} \quad (1.34)$$

folgt. Dies bedeutet, dass das entwickelnde Modell für einen Pumpspeicher nur dann realistisch ist, wenn $\bar{u}_0(q)$ aus (1.24) für alle q der Bedingung (1.34) genügt. Diese Bedingung ist offensichtlich erfüllt, wenn sie für $q = \bar{q}$, d.h. wenn

$$P_{\text{theo}} \geq \frac{c_0 \bar{u}_0(\bar{q}) \bar{q}}{2} \quad (1.35)$$

gilt. Hierbei sind $\bar{u}_0(\bar{q}) = A_{\text{out}} \sqrt{2g\bar{q}}$ die physikalisch maximal mögliche Rate und \bar{q} der maximale Füllstand.

Substituiert man (1.24) in (1.35), so ergibt sich $P_{\text{theo}} \geq c_0 A_{\text{out}} \sqrt{2g\bar{q}} \bar{q}/2$ und schließlich eine obere Schranke für den maximalen Füllstand

$$\bar{q} \leq \sqrt[3]{\frac{2P_{\text{theo}}^2}{(c_0 A_{\text{out}})^2 g}}, \quad (1.36)$$

welche bei der Wahl der Modellparameter einzuhalten ist.

Beim Pumpen wird dem durch die Pumpe strömenden Wasser eine kinetische Energie erteilt, welche in potentielle Energie und Reibungsenergie umgewandelt wird. Die kinetische Energie ist gleich der von der Pumpe aufgenommenen elektrischen Energie multipliziert mit dem Wirkungsgrad der Pumpe $\eta_{\text{pump}} \in [0, 1]$. Es gilt also

$$\eta_{\text{pump}} W_{\text{el}} = W_{\text{kin}} = W_{\text{pot}} + W_{\text{f}}.$$

Für die elektrische Energie gilt $W_{\text{el}} = P_{\text{pump}} dt$. Mit den oben erhaltenen Ansätzen für W_{pot} und W_{f} und unter Berücksichtigung der Tatsache, dass beim Pumpen der Volumenstrom u_t negativ ist, erhält man

$$\begin{aligned} \eta_{\text{pump}} W_{\text{el}} &= W_{\text{pot}} + W_{\text{f}}, \\ \eta_{\text{pump}} P_{\text{pump}} dt &= -c_0 (Q_t^u + q_f^-) u_t dt. \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung folgt unmittelbar für die aus dem Netz aufgenommene Leistung der Pumpe

$$P_{\text{pump}} = -\frac{c_0 (Q_t^u + q_f^-) u_t}{\eta_{\text{pump}}}. \quad (1.37)$$

Somit wird der laufende Gewinn $F(q, s, y)$, der im Zielkriterium des Modells eines Pumpspeichers verwendet wird, durch Multiplikation der abgegebenen bzw. aufgenommen Leistung

in (1.32) bzw. (1.37) mit dem Spotpreis der Energie wie folgt definiert:

$$F(q, s, y) = \begin{cases} c_F s (q - q_f^+) \eta_{\text{turb}}(q, y) y, & y \in (0, \bar{u}(q)], \\ 0, & y = 0, \\ c_F s (q + q_f^-) \eta_{\text{pump}}^{-1} y, & y \in [\underline{u}(q), 0), \end{cases} \quad (1.38)$$

wobei die maximalen und minimalen Raten des Volumenstromes $\bar{u}(q)$ und $\underline{u}(q)$ gemäß der Beziehung (1.27) gegeben sind, der Wirkungsgrad der Turbine $\eta_{\text{turb}}(q, y)$ in (1.33) definiert ist und $c_F = 24 \cdot 365 \cdot c_0$ ein Umrechnungsfaktor ist, der erlaubt, den laufenden Gewinn F anstatt in EUR/h in EUR/a zu messen.

Da der Füllstand $q \in \mathcal{Q}$ und die Energierate $y \in U(q) \subset U_M$ immer beschränkt sind, genügt die in (1.38) definierte Gewinnfunktion F für alle $y \in U_M$ der Wachstums- und Lipschitz-Bedingung (1.4) bzw. (1.5) in Annahme 1.1.3, wenn der Preisprozess ein Markov-modulierter OU-Prozess (1.16) ist.

Die Funktion F ist wegen der Abhängigkeit des Wirkungsgrades η_{turb} von y eine nichtlineare Funktion der Steuerung y . Für $y > 0$ ist F ein Polynom 3. Grades in y und für $y < 0$ ist sie linear in y . Hierbei ist F stetig und stückweise differenzierbar und hat im Punkt $y = 0$ einen „Knick“. Bezüglich y und q ist sie beschränkt, da q nur Werte aus dem abgeschlossenen Intervall $[\underline{q}, \bar{q}]$, und y aus dem abgeschlossenen Intervall $[\underline{u}(q), \bar{u}(q)] \subset [\underline{M}_u, \bar{M}_u]$ annimmt. Einen typischen Verlauf von F in Abhängigkeit von der Steuerung y für fixierten Energiepreis s_0 und zwei verschiedene Werte des Füllstandes q zeigt Abbildung 1.3.

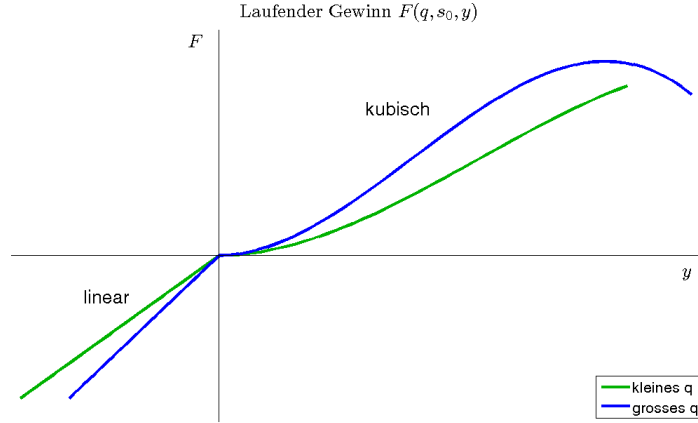


Abbildung 1.3: Laufender Gewinn $F(q, s_0, y)$ als Funktion von y für fixierten Energiepreis s_0 und zwei fixierte Füllstände q .

Endauszahlungsfunktion

Für das stochastische Optimalsteuerungsproblem mit endlichem Zeithorizont hängt die Ziel-funktion auch von der Endauszahlungsfunktion Φ ab.

Typische Beispiele für die Wahl von $\Phi(q, s)$ sind:

- *wertloser Verfall*, bei welchem die gespeicherte Energie wertlos verfällt, d.h. $\Phi(q, s) = 0$.
- *Pumpspeicherauflösung*, bei welcher die sich zum Zeitpunkt T im Speicher befindliche Wassermenge mit dem Füllstand $Q_T^u = q$ mit maximaler Rate des Volumenstromes abgelassen wird und die dadurch erzeugte Energie $\mathcal{E}_L(q)$ mit Liquidationspreis $h_L(S_T) = \alpha_s \cdot S_T < S_T$ mit dem Abschlag $\alpha_s \in (0, 1)$ vergütet wird. Der dabei entstandene Endgewinn wird durch

$$\Phi(q, s) = h_L(s) \mathcal{E}_L(q)$$

definiert.

- *Strafzahlung*, welche erhoben wird, wann eine Mindestreserve q_P des Füllstandes unterschritten wird, d.h. falls $Q_T^u < q_P$ gilt. Für die zum Auffüllen des Speichers vom Niveau q auf q_P benötigte Energie $\mathcal{E}_P(q)$, welche beim Pumpen mit maximaler Rate verbraucht wird, wird ein Strafpriß $h_P(S_T) = \beta_s \cdot S_T$ mit $\beta_s > 1$ berechnet. Wird die Mindestreserve überschritten ($Q_T^u \geq q_P$), so wird der q_P übersteigende Speicherinhalt nicht vergütet und verfällt wertlos. Dies führt zur einer Straffunktion Φ in der Form

$$\Phi(q, s) = \begin{cases} h_P(s) \mathcal{E}_P(q), & q < q_P, \\ 0, & q \geq q_P. \end{cases}$$

Für die zwei letzten Fälle werden im Weiteren die Endauszahlungsfunktionen Φ für das Problem ohne Zufluss bestimmt. Zudem wird angenommen, dass die Querschnittsfläche des oberen Speicherbeckens konstant ist, d.h. $A(q) := A_S$, und der Einfachheit halber das Wasser mit physikalisch maximal möglicher Rate des Volumenstromes $\bar{u}(q) = \bar{u}_0(q) = A_{\text{out}} \sqrt{2gq}$ bzw. $\underline{u}(q) = \underline{u}_0(q) = -\frac{\eta_{\text{pump}} P_{\text{pump}}}{c_0(q+q_f^-)}$ abgelassen bzw. gepumpt wird, d.h. es erfolgt keine Glättung wie in (1.27). Unter den gemachten Annahmen lassen sich geschlossene Ausdrücke für die Endauszahlungsfunktionen erhalten.

Beispiel 1.1.11 (Endauszahlungsfunktion für die Pumpspeicherauflösung). Bezeichne \bar{Q} den Füllstand, der sich ergibt, wenn das zum Zeitpunkt T mit dem Füllstand q gefüllte obere Speicherbecken mit der physikalisch maximal möglichen Rate des Volumenstromes $\bar{u}_0(\bar{Q}_t) = A_{\text{out}} \sqrt{2g\bar{Q}_t}$ entleert wird. Dann ist \bar{Q} Lösung des folgenden Anfangswertproblems für die ODE (1.21)

$$d\bar{Q}_t = -\mathfrak{h} A_{\text{out}} \sqrt{2g\bar{Q}_t} dt, \quad \bar{Q}_T = q \in [\underline{q}, \bar{q}], \quad t \geq T,$$

für die gilt

$$\bar{Q}_t = \left(\sqrt{q} - \frac{\mathfrak{h} A_{\text{out}} \sqrt{2g}}{2} (t - T) \right)^2, \quad t \geq T. \quad (1.39)$$

Für den Zeitpunkt $T_L(q)$ der vollständigen Entleerung gilt $\bar{Q}_{T_L(q)} = \underline{q}$. Hieraus folgt aus (1.39)

$$T_L(q) = T + \frac{2}{\mathfrak{h} A_{\text{out}} \sqrt{2g}} (\sqrt{q} - \sqrt{\underline{q}}), \quad q \in [\underline{q}, \bar{q}]. \quad (1.40)$$

Die auf dem Zeitintervall $[T, T_L(q)]$ erzeugte Energie $\mathcal{E}_L(q)$ kann man unter Verwendung von (1.38) für den Fall des Ablassens wie folgt berechnen:

$$\mathcal{E}_L(q) = \int_T^{T_L(q)} c_F(\bar{Q}_t - q_f^+) \eta_{\text{turb}}(\bar{Q}_t, \bar{u}_0(\bar{Q}_t)) \bar{u}_0(\bar{Q}_t) dt. \quad (1.41)$$

Nach (1.33) gilt für den Wirkungsgrad der Turbine

$$\begin{aligned} \eta_{\text{turb}}(q, \bar{u}_0(q)) &= \eta_{\text{max}} \left(1 - \left(\frac{c_0 \bar{u}_0(q) q}{P_{\text{theo}}} - 1 \right)^2 \right) \\ &= \eta_{\text{max}} \left(2\mathfrak{p} q^{\frac{3}{2}} - \mathfrak{p}^2 q^3 \right) \quad \text{mit} \quad \mathfrak{p} = \frac{c_0 A_{\text{out}} \sqrt{2g}}{P_{\text{theo}}}. \end{aligned}$$

Nach einigen Umformungen folgt aus (1.41):

$$\mathcal{E}_L(q) = c_F A_{\text{out}} \sqrt{2g} \eta_{\text{max}} \mathfrak{p} \int_T^{T_L(q)} \left(\bar{Q}_t - q_f^+ \right) \left(2\bar{Q}_t^2 - \mathfrak{p} \bar{Q}_t^{\frac{7}{2}} \right) dt. \quad (1.42)$$

Somit ist der Endwert bei der Pumpspeicherauflösung nach (1.40) und (1.42) gleich

$$\begin{aligned} \Phi(q, s) &= h_L(s) \cdot \frac{2c_F \eta_{\text{max}} \mathfrak{p}}{\mathfrak{h}} \cdot \left[\frac{2}{7} \left(q^{\frac{7}{2}} - \underline{q}^{\frac{7}{2}} \right) - \frac{\mathfrak{p}}{10} \left(q^5 - \underline{q}^5 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2q_f^+}{5} \left(q^{\frac{5}{2}} - \underline{q}^{\frac{5}{2}} \right) + \frac{\mathfrak{p} q_f^+}{8} \left(q^4 - \underline{q}^4 \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Beispiel 1.1.12 (Endauszahlungsfunktion für die Strafzahlung). Sei \underline{Q} der Füllstand, der sich ergibt, wenn das zum Zeitpunkt T mit dem Füllstand q gefüllte obere Speicherbecken mit der physikalisch maximal möglichen Rate des Volumenstromes $\underline{u}_0(\underline{Q}_t) = -\frac{\eta_{\text{pump}} P_{\text{pump}}}{c_0(\underline{Q}_t + q_f^-)}$ befüllt wird. Dann ist \underline{Q} Lösung des folgenden Anfangswertproblems für die ODE (1.21)

$$d\underline{Q}_t = \mathfrak{h} \frac{\eta_{\text{pump}} P_{\text{pump}}}{c_0(\underline{Q}_t + q_f^-)} dt, \quad \underline{Q}_T = q \in [q, q_P], \quad t \geq T,$$

für die gilt

$$\underline{Q}_t = \sqrt{(q + q_f^-)^2 + \frac{2\mathfrak{h} \eta_{\text{pump}} P_{\text{pump}}}{c_0} (t - T)} - q_f^-, \quad t \geq T.$$

Für den Zeitpunkt $T_P(q)$, zu dem der geforderte Füllstand q_P erreicht ist, folgt aus der Bedingung $\underline{Q}_{T_P(q)} = q_P$:

$$T_P(q) = T + \frac{c_0(q_P - q)(q_P + 2q_f^- + q)}{2\mathfrak{h} \eta_{\text{pump}} P_{\text{pump}}}, \quad q \in [q, q_P]. \quad (1.44)$$

Die Energie $\mathcal{E}_P(q)$, die verbraucht wird, um den Speicher von dem zum Zeitpunkt T gegebenen Füllstand $\underline{Q}_T = q$ auf die Mindestreserve q_P zu befüllen, lässt sich mittels der Funktion (1.38) für den Fall des Pumpens folgendermaßen bestimmen:

$$\mathcal{E}_P(q) = \int_T^{T_P(q)} \frac{c_F(\underline{Q}_t + q_f^-)}{\eta_{\text{pump}}} \underline{u}_0(\underline{Q}_t) dt. \quad (1.45)$$

Mit der physikalisch maximalen Rate des Volumenstromes $\underline{u}_0(q)$ (siehe (1.25)), dem kritischen Zeitpunkt $T_P(q)$ aus (1.44) und der benötigten Energie (1.45) ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi(q, s) &= h_P(s) \int_T^{T_P(q)} \frac{c_F(\underline{Q}_t + q_f^-)}{\eta_{\text{pump}}} \left(-\frac{\eta_{\text{pump}} P_{\text{pump}}}{c_0(\underline{Q}_t + q_f^-)} \right) dt, \\ &= -h_P(s) \frac{c_F P_{\text{pump}}}{c_0} (T_P(q) - T), \quad q \in [\underline{q}, q_P]. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\Phi(q, s) = -h_P(s) \frac{c_F(q_P - q)(q_P + 2q_f^- + q)}{2\eta_{\text{pump}}}, \quad q \in [\underline{q}, q_P]. \quad (1.46)$$

Für die in beiden Beispielen 1.1.11 und 1.1.12 in (1.43) und (1.46) erhaltenen Endauszahlungsfunktionen Φ folgt aus der Beschränktheit des Füllstandes $q \in \mathcal{Q}$ unmittelbar, dass sie der Wachstums- und Lipschitz-Bedingung (1.4) bzw. (1.5) der Annahme 1.1.3 genügen.

1.1.4 HMM-Filter

Die im Abschnitt 1.1.3 formulierten stochastischen Optimalsteuerungsprobleme mit partieller Information (1.29) und (1.31) lassen sich auf Optimierungsprobleme mit voller Information zurückführen. Dafür ist es erforderlich, alle Komponenten der durch den Faktorprozess getriebenen Preisprozessgleichung (1.15) so umzuformen, dass sie an die Beobachtungsfiltration $\mathbb{F}^{S,Z}$ adaptiert sind. Da im vorliegenden Modell der Zufluss Z vom Faktorprozess Y unabhängig angenommen wurde, genügt es zu fordern, dass nur der Driftkoeffizient a_S der SDE für den Preisprozess S an die von S erzeugte Filtration \mathbb{F}^S adaptiert ist, welche eine Teilfiltration von $\mathbb{F}^{S,Z}$ ist. In der Literatur ist dieses Problem als klassische Aufgabe der Filtertheorie bekannt, die im vorliegenden Fall in der Schätzung des Faktorprozesses $(Y_t)_{t \in [0,T]}$ bzw. der Drift $(a_S(S_t, Y_t))_{t \in [0,T]}$ auf Basis der beobachtbaren Preise S_t besteht.

Der (im quadratischen Mittel) beste Schätzer für den Faktorprozess $(Y_t)_{t \in [0,T]}$ ist der bedingte Erwartungswert unter \mathcal{F}_t^S :

$$\hat{Y}_t = \mathbb{E}(Y_t | \mathcal{F}_t^S) = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(Y_t = e_1 | \mathcal{F}_t^S) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(Y_t = e_d | \mathcal{F}_t^S) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} p_t^1 \\ \vdots \\ p_t^d \end{pmatrix} = p_t. \quad (1.47)$$

Den Schätzer $p_t^i = \mathbb{P}(Y_t = e_i \mid \mathcal{F}_t^S)$, $i = 1, \dots, d$, aus (1.47) nennt man *Hidden-Markov-Model-Filter (HMM-Filter)* oder *Wonham-Filter* (siehe Wonham [74]). Er gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die Markov-Kette zum Zeitpunkt t im i -ten Zustand verweilt.

Analog zu (1.47) definiert man auch den im quadratischen Mittel optimalen Schätzer für die nicht-beobachtbare Drift $a_S(S_t, Y_t)$:

$$\hat{a}_t := \mathbb{E}\left(a_S(S_t, Y_t) \mid \mathcal{F}_t^S\right).$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \hat{a}_t &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^d a_t^i \mathbf{1}_{\{Y_t=e_i\}} \mid \mathcal{F}_t^S\right) = \sum_{i=1}^d a_t^i \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{Y_t=e_i\}} \mid \mathcal{F}_t^S\right) \\ &= \sum_{i=1}^d a_t^i \mathbb{P}\left(Y_t = e_i \mid \mathcal{F}_t^S\right) = \sum_{i=1}^d a_t^i p_t^i = \langle a_t, p_t \rangle, \end{aligned} \quad (1.48)$$

wobei $\hat{a}_t = \sum_{i=1}^d a_t^i p_t^i$ den HMM-Filter für die von der Markov-Kette Y_t getriebene Drift $a_S(S_t, Y_t)$ bezeichnet.

Der folgende Satz liefert die SDE für den HMM-Filter:

Theorem 1.1.13 (Liptser u. Shiryaev [49]). *Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $p_t^i = \mathbb{P}(Y_t = e_i \mid \mathcal{F}_t^S)$, $e_i \in E_d$, $i = 1, \dots, d$, genügen folgendem d -dimensionalen System stochastischer Differentialgleichungen:*

$$p_t^i = p_0^i + \int_0^t \left(\sum_{k=1}^d \lambda_{ki} p_u^k \right) du + \int_0^t p_u^i \frac{a_u^i - \hat{a}_u}{b_S(S_u)} d\widetilde{W}_u^S, \quad i = 1, \dots, d, \quad (1.49)$$

wobei $\widetilde{W}^S = (\widetilde{W}_t^S)_{t \in [0, T]}$ ein \mathbb{F}^S -Wiener-Prozess (Innovationsprozess) mit

$$\widetilde{W}_t^S = \int_0^t \frac{1}{b_S(S_u)} dS_u - \int_0^t \frac{\hat{a}_u}{b_S(S_u)} du$$

ist.

Beweis. Beweis siehe Theorem 9.1 in Liptser u. Shiryaev [49] und auch Elliott, Aggoun u. Moore [22], Wonham [74]. \square

Das Gleichungssystem (1.49) lässt sich auch in Differentialform darstellen:

$$dp_t = \underline{\alpha}(p_t) dt + \underline{\beta}(S_t, p_t) d\widetilde{W}_t^S, \quad p_0 = (p_0^1, \dots, p_0^d)^\top, \quad (1.50)$$

mit der Drift bzw. dem Diffusionskoeffizienten

$$\begin{aligned} \underline{\alpha}(p) &= \bar{\Lambda}^\top p, \quad \underline{\beta}(s, p) = b_S^{-1}(s) \left[\text{diag}(p) a - \langle a, p \rangle p \right], \\ \underline{\alpha}_i(p) &= \sum_{k=1}^d \lambda_{ki} p^k, \quad \underline{\beta}_i(s, p) = p^i \frac{a^i - \hat{a}}{b_S(s)} = p^i \frac{a^i - \langle a, p \rangle}{b_S(s)}, \quad i = 1, \dots, d. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Es sei bemerkt, dass der Filterprozess $(p_t)_{t \in [0, T]}$ für jedes t Werte in der Menge

$$\mathcal{P} := \left\{ p \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^d p^i = 1, p^i \geq 0, i = 1, \dots, d \right\} \subset \mathbb{R}^d$$

annimmt. Unter Ausnutzung der Normierungseigenschaft $\sum_{i=1}^d p_t^i = 1$ für die Filterwahrscheinlichkeit kann man p_t mit Hilfe des $(d-1)$ -dimensionalen Filterprozesses als

$$\Pi_t = (\Pi_t^1, \dots, \Pi_t^{d-1})^\top = (p_t^1, \dots, p_t^{d-1})^\top$$

darstellen. Dann kann die ursprüngliche Filterwahrscheinlichkeit p_t aus Π_t rekonstruiert werden durch:

$$p_t = R\Pi_t \quad \text{mit} \quad R\Pi := \left(\pi^1, \dots, \pi^{d-1}, 1 - \sum_{i=1}^{d-1} \pi^i \right)^\top.$$

Wenn $p \in \mathcal{P}$, dann gehören die Filterwahrscheinlichkeiten Π zu folgender $(d-1)$ -dimensionalen Teilmenge von \mathbb{R}^{d-1}

$$\mathcal{P} = \left\{ \pi \in \mathbb{R}^{d-1} \mid \sum_{i=1}^{d-1} \pi^i \leq 1, \pi^i \geq 0, i = 1, \dots, d-1 \right\}.$$

Damit lässt sich die Filtergleichung (1.50) für $\pi \in \mathcal{P}$ umschreiben zu

$$d\Pi_t = \alpha(\Pi_t)dt + \beta(S_t, \Pi_t)d\widetilde{W}_t^S, \quad \Pi_0 = \pi_0 := (\pi_0^1, \dots, \pi_0^{d-1})^\top, \quad (1.52)$$

mit Koeffizienten

$$\begin{aligned} \alpha(\pi) &= \left(\underline{\alpha}_1(R\pi), \dots, \underline{\alpha}_{d-1}(R\pi) \right)^\top \in \mathbb{R}^{d-1}, \\ \beta(s, \pi) &= \left(\underline{\beta}_1(s, R\pi), \dots, \underline{\beta}_{d-1}(s, R\pi) \right)^\top \in \mathbb{R}^{d-1}. \end{aligned}$$

Nun wird die Preisprozessgleichung (1.15) mittels des Innovationsprozesses $(\widetilde{W}_t^S)_{t \in [0, T]}$ und der Filterwahrscheinlichkeit $(\Pi_t)_{t \in [0, T]}$ äquivalent umgeschrieben:

$$dS_t = \widehat{a}_S(S_t, \Pi_t)dt + b_S(S_t)d\widetilde{W}_t^S, \quad S_0 = s_0, \quad (1.53)$$

mit dem HMM-Filter (1.48) als Drift

$$\widehat{a}_S(s, \pi) = \langle a, \pi \rangle = \sum_{i=1}^{d-1} a_S(s, e_i)\pi^i + a_S(s, e_d)\left(1 - \sum_{i=1}^{d-1} \pi^i\right). \quad (1.54)$$

Weil der Driftkoeffizient a_S der SDE (1.15) der Wachstums- und Lipschitz-Bedingung (1.2) bzw. (1.3) der Annahme 1.1.2 genügt, genügt wegen der Beschränktheit von Π der Driftkoeffizient \widehat{a}_S in (1.54) auch diesen Bedingungen. Dabei gelten für alle $(s, \pi), (s_1, \pi_1), (s_2, \pi_2) \in \mathcal{S} \times \mathcal{P}$ folgende Abschätzungen:

$$\begin{aligned} |\widehat{a}_S(s, \pi)| &\leq C_1(1 + |s|), \quad C_1 > 0, \\ |\widehat{a}_S(s_1, \pi_1) - \widehat{a}_S(s_2, \pi_2)| &\leq C_2(|s_1 - s_2| + |\pi_1 - \pi_2|), \quad C_2 > 0. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Somit wird die Dynamik des Energiepreises im Modell mit partieller Information (1.15) durch zwei SDEs (1.52)-(1.53) beschrieben.

Beispiel 1.1.14. Für die in Kapitel 2 betrachteten numerischen Methoden zur Lösung des Optimalsteuerungsproblems erfolgt eine Beschränkung auf den Fall einer Markov-Kette mit $d = 2$ Zuständen $e_1, e_2 \in E_2$, deren Generatormatrix folgende spezielle Gestalt hat:

$$\bar{\Lambda} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & -\lambda_2 \end{pmatrix},$$

wobei $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ die Intensitäten der exponentialverteilten Verweilzeiten in den Zuständen e_1 und e_2 bezeichnen.

Für $d = 2$ kann die SDE (1.52) für den Filter in folgender einfacheren Form geschrieben werden:

$$d\Pi_t = \left(\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\Pi_t \right) dt + \Pi_t(1 - \Pi_t) \frac{a_S(S_t, e_1) - a_S(S_t, e_2)}{b_S(S_t)} d\widetilde{W}_t^S, \quad \Pi_0 = \pi_0. \quad (1.56)$$

Die Preisgleichung (1.53) lautet dann

$$dS_t = \left(\Pi_t a_S(S_t, e_1) + (1 - \Pi_t) a_S(S_t, e_2) \right) dt + b_S(S_t) d\widetilde{W}_t^S, \quad S_0 = s_0, \quad (1.57)$$

und das Energiepreismodell wird nun durch die SDEs (1.56)-(1.57) beschrieben.

Beispiel 1.1.15. Der Markov-modulierte OU-Prozess ist durch die SDE (1.16) gegeben. Gemäß der Beziehung (1.48) ergibt sich für den HMM-Filter für $a_S(S_t, Y_t) = \kappa(Y_t)(\mu(Y_t) - S_t)$:

$$\begin{aligned} \hat{a}(S_t, p_t) &= \sum_{i=1}^d a_S(S_t, e_i) p_t^i = \sum_{i=1}^d \left(\kappa_i(\mu_i - S_t) \right) p_t^i = \bar{\mathbf{m}}(p_t) - \bar{\kappa}(p_t) S_t \\ \text{mit} \quad \bar{\mathbf{m}}(p_t) &= \sum_{i=1}^d \kappa_i \mu_i p_t^i, \quad \bar{\kappa}(p_t) = \sum_{i=1}^d \kappa_i p_t^i. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Nach Theorem 1.1.13 wird analog zu (1.50) die SDE für die Filterwahrscheinlichkeit im Falle des OU-Prozesses (1.16) hergeleitet, deren Diffusionskoeffizient $\underline{\beta}_i(s, p)$, $i = 1, \dots, d$, im Vergleich zu (1.51) wie folgt definiert wird:

$$\begin{aligned} \underline{\beta}_i(s, p) &= p^i \frac{a_S(s, e_i) - \hat{a}_S(s, p)}{\sigma} \\ &= p^i \frac{(\kappa_i \mu_i - \bar{\mathbf{m}}(p)) - (\kappa_i - \bar{\kappa}(p))s}{\sigma}, \quad i = 1, \dots, d. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Zusammen mit dem HMM-Filter (1.58) formuliert man schließlich die Preisprozessgleichung (1.16), deren Drift nun \mathbb{F}^S -adaptiert ist (siehe (1.53)):

$$dS_t = \left(\bar{\mathbf{m}}(\Pi_t) - \bar{\kappa}(\Pi_t) S_t \right) dt + \sigma d\widetilde{W}_t^S, \quad S_0 = s_0, \quad (1.60)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}\widehat{a}_S(s, \pi) &= \overline{m}(\pi) - \overline{\kappa}(\pi)s, \\ \overline{m}(\pi) &= \langle \kappa \mu, \pi \rangle = \sum_{i=1}^{d-1} \kappa_i \mu_i \pi^i + \kappa_d \mu_d (1 - \sum_{i=1}^{d-1} \pi^i), \\ \overline{\kappa}(\pi) &= \langle \kappa, \pi \rangle = \sum_{i=1}^{d-1} \kappa_i \pi^i + \kappa_d (1 - \sum_{i=1}^{d-1} \pi^i).\end{aligned}\tag{1.61}$$

Wenn nur das Gleichgewichtsniveau $\mu(Y_t)$ oder die Steifigkeit $\kappa(Y_t)$ vom Faktorprozess $(Y_t)_{t \in [0, T]}$ in der Preisprozessgleichung (1.16) getrieben wird, ergeben sich folgende Spezialfälle für die \mathbb{F}^S -adaptierte Drift $\widehat{a}_S(s, \pi)$ und den \mathbb{F}^S -adaptierten Diffusionskoeffizienten $\underline{\beta}_i(s, \pi)$, $i = 1, \dots, d-1$:

- $\mu = \mu(Y_t)$, $\kappa = \text{const}$:

$$\begin{aligned}\widehat{a}_S(s, \pi) &= \kappa(\overline{\mu}(\pi) - s), \quad \overline{\mu}(\pi) = \sum_{i=1}^{d-1} \mu_i \pi^i + \mu_d (1 - \sum_{i=1}^{d-1} \pi^i), \\ \underline{\beta}_i(s, \pi) &= \pi^i \frac{\kappa}{\sigma} (\mu_i - \overline{\mu}(\pi)), \quad i = 1, \dots, d-1;\end{aligned}$$

- $\mu = \text{const}$, $\kappa = \kappa(Y_t)$:

$$\widehat{a}_S(s, \pi) = \overline{\kappa}(\pi)(\mu - s), \quad \underline{\beta}_i(s, \pi) = \pi^i (\kappa_i - \overline{\kappa}(\pi)) \frac{\mu - s}{\sigma}, \quad i = 1, \dots, d-1.$$

Beispiel 1.1.16. Im Falle einer Markov-Kette mit $d = 2$ Zuständen $e_1, e_2 \in E_2$ ergeben sich folgende Spezialfälle der Preis- und Filtergleichungen (siehe (1.56)-(1.57)) für den OU-Prozess (1.16):

$$dS_t = \left((\Pi_t \kappa_1 \mu_1 + (1 - \Pi_t) \kappa_2 \mu_2) - (\Pi_t \kappa_1 + (1 - \Pi_t) \kappa_2) S_t \right) dt + \sigma d\widetilde{W}_t^S, \quad S_0 = s_0, \tag{1.62}$$

$$d\Pi_t = \left(\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \Pi_t \right) dt + \Pi_t (1 - \Pi_t) \frac{(\kappa_1 \mu_1 - \kappa_2 \mu_2) - (\kappa_1 - \kappa_2) S_t}{\sigma} d\widetilde{W}_t^S, \quad \Pi_0 = \pi_0. \tag{1.63}$$

Hängt nur jeweils einer der beiden Parameter μ und κ von Y ab, ergeben sich folgende Spezialfälle für die Drift- und Diffusionskoeffizienten in obigen SDEs (1.62)-(1.63):

- $\mu = \mu(Y_t)$, $\kappa = \text{const}$:

$$\widehat{a}_S(s, \pi) = \kappa(\pi \mu_1 + (1 - \pi) \mu_2 - s), \quad \beta(s, \pi) = \pi(1 - \pi) \frac{\kappa}{\sigma} (\mu_1 - \mu_2);$$

- $\mu = \text{const}$, $\kappa = \kappa(Y_t)$:

$$\widehat{a}_S(s, \pi) = (\pi \kappa_1 + (1 - \pi) \kappa_2)(\mu - s), \quad \beta(s, \pi) = \pi(1 - \pi)(\kappa_1 - \kappa_2) \frac{\mu - s}{\sigma}.$$

1.2 Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung

In diesem Abschnitt wird die Transformation des stochastischen Optimalsteuerungsproblems mit partieller Information zu einem Problem mit voller Information betrachtet. Für dieses Problem wird die zugehörige HJB-Gleichung für die Wertfunktion aufgestellt, aus der ein Kandidat für die optimale Steuerung u^* abgeleitet wird.

1.2.1 Optimierungsproblem mit voller Information

Im Abschnitt 1.1.3 wurden die stochastischen Optimalsteuerungsprobleme mit partieller Information für einen endlichen (1.29) bzw. einen unendlichen (1.31) Zeithorizont aufgestellt, für welche der Driftkoeffizient a_S in der SDE (1.15) für den Energiepreis von einem Faktorprozess Y abhängt und somit nicht an die Beobachtungsfiltration $\mathbb{F}^{S,Z}$ adaptiert ist. Um diese Optimierungsprobleme mit Methoden der dynamischen Programmierung lösen zu können, ist es jedoch erforderlich das Steuerungsproblem mit partieller Information zunächst in ein Problem mit voller Information zu transformieren (siehe z.B. Rieder u. Bäuerle [55, Abschnitt 3], Frey, Gabih u. Wunderlich [30, Abschnitt 2.4]). Dies wird erreicht, wenn die Dynamik des Energiepreises wie in (1.53) mit Hilfe des Innovationsprozesses \widetilde{W}^S ausgedrückt wird und der Zustand des Steuerungsproblems um den Filter Π aus (1.52) erweitert wird.

Somit lässt sich nun der Zustand für den Pumpspeicher mit Hilfe der obigen Gleichungen (1.17), (1.21), (1.52) und (1.53) als Vektor $X^u := (Q^u, S, Z, \Pi^\top)^\top$ darstellen, dessen Dynamik durch die SDE (1.1)

$$dX_t^u = a(X_t^u, u_t)dt + b(X_t^u)dW_t, \quad X_0^u = x_0 := (q_0, s_0, z_0, \pi_0^\top)^\top \in \mathcal{X}, \quad (1.64)$$

$$\mathcal{X} := \mathcal{Q} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{P} = \left\{ (q, s, z, \pi) \mid q \in \mathcal{Q}, s \in \mathcal{S}, z \in \mathcal{Z}, \pi \in \mathcal{P} \right\},$$

mit der Drift $a : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{d+2}$ und dem Diffusionskoeffizienten $b : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^{(d+2) \times 2}$, wobei

$$a = \begin{pmatrix} \psi \\ \widehat{a}_S \\ a_Z \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+2}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_S & 0 \\ 0 & b_Z \\ \beta & \mathbf{0}_{(d-1) \times 1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(d+2) \times 2},$$

sowie dem zweidimensionalen Wiener-Prozess $W = (\widetilde{W}^S, W^Z)^\top$ und dem Anfangswert x_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ gegeben ist. Komponentenweise sieht (1.64) so aus:

$$\begin{aligned} dQ_t^u &= \psi(Q_t^u, Z_t, u_t) dt, & Q_0^u &= q_0, \\ dS_t &= \widehat{a}_S(S_t, \Pi_t)dt + b_S(S_t)d\widetilde{W}_t^S, & S_0 &= s_0, \\ dZ_t &= a_Z(Z_t)dt + b_Z(Z_t)dW_t^Z, & Z_0 &= z_0, \\ d\Pi_t &= \alpha(\Pi_t)dt + \beta(S_t, \Pi_t)d\widetilde{W}_t^S, & \Pi_0 &= \pi_0. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Zur Betrachtung der Spezialfälle für die aufgestellte Zustandsdynamik (1.65) ist es bequemer, im Weiteren folgende allgemeine Notation einzuführen. Bezeichne $\underline{d} \in \{2, 3, d+1, d+2\}$

die Anzahl der berücksichtigten Prozesse in (1.65). Es wird vorausgesetzt, dass der stochastische Prozess $(X_t^u)_{t \in [0, T]}$ und die Wiener-Prozesse $(W_t)_{t \in [0, T]}$ auf einem allgemeinen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{H}, \mathbb{P})$ mit der Beobachtungsfiltration $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_t)_{t \in [0, T]}$ und $\mathcal{H} = \mathcal{H}_T$ definiert sind. Dabei ergeben sich in Abhängigkeit von \underline{D} folgende vier Fälle für den Zustandsprozess:

- Modell mit Zufluss und nicht direkt beobachtbarem Faktorprozess:

$$\underline{D} := d + 2 \text{ mit } \mathcal{H}_t := \mathcal{F}_t^S \vee \mathcal{F}_t^Z, X^u := (Q^u, S, Z, \Pi^\top)^\top \text{ und } W := (\widetilde{W}^S, W^Z)^\top;$$

- Modell ohne Zufluss und mit Faktorprozess:

$$\underline{D} := d + 1 \text{ mit } \mathcal{H}_t := \mathcal{F}_t^S, X^u := (Q^u, S, \Pi^\top)^\top \text{ und } W := \widetilde{W}^S;$$

- Modell mit Zufluss und ohne Faktorprozess:

$$\underline{D} := 3 \text{ mit } \mathcal{H}_t := \mathcal{F}_t, X^u := (Q^u, S, Z)^\top \text{ und } W := (W^S, W^Z)^\top;$$

- Modell ohne Zufluss und ohne Faktorprozess:

$$\underline{D} := 2 \text{ mit } \mathcal{H}_t := \mathcal{F}_t, X^u := (Q^u, S)^\top \text{ und } W := W^S.$$

In jedem der betrachteten Fälle sind die Drift a und der Diffusionskoeffizient b der jeweiligen Zustandsgleichung (1.64) an die Beobachtungsfiltration \mathbb{H} adaptiert. So gilt z.B. $\mathbb{H} = \mathbb{F}^S$, wenn der Energiepreis $(S_t)_{t \in [0, T]}$ von einem Faktorprozess $(Y_t)_{t \in [0, T]}$ getrieben wird, und $\mathbb{H} = \mathbb{F}^{S, Z}$, falls bei der mathematischen Modellierung eines Pumpspeichers noch der natürliche Zufluss $(Z_t)_{t \in [0, T]}$ mitberücksichtigt wird. Damit kann man das stochastische Optimalsteuerungsproblem mit voller Information aufstellen, für welches der Steuerungsprozess $(u_t)_{t \in [0, T]}$ gemäß (1.7) aus der Menge der zulässigen Markov-Steuerungsprozesse

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(t, x) = & \left\{ u = (u_r)_{r \in [t, T]} \mid u \text{ ist } \mathbb{H} - \text{progressiv messbar,} \right. \\ & u_r = w(r, X_r^u) \text{ und } w(r, x) \in \mathcal{U}(q), \forall (r, x) \in [t, T] \times \mathcal{X}, \\ & \left. \mathbb{E} \left[\int_t^T e^{-\rho(r-t)} |F(X_r^u, u_r)| dr + e^{-\rho(T-t)} |\Phi(X_T^u)| \mid X_t^u = x \right] < \infty \right\} \end{aligned} \quad (1.66)$$

gewählt werden kann. Die Zielfunktion wird für alle $(t, x) \in [0, T] \times \mathcal{X}$ und $u \in \mathcal{U}(t, x)$ analog zu (1.8) als

$$J(t, x; u) = \mathbb{E} \left[\int_t^T e^{-\rho(r-t)} F(X_r^u, u_r) dr + e^{-\rho(T-t)} \Phi(X_T^u) \mid X_t^u = x \right] \quad (1.67)$$

definiert, wobei $F(x, y) = F(q, s, y)$ und $\Phi(x) = \Phi(q, s)$ die im Abschnitt 1.1.3 eingeführten Gewinn- und Endauszahlungsfunktionen sind. Schließlich ist

$$V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{U}(t, x)} J(t, x; u) \quad (1.68)$$

die Wertfunktion für alle $(t, x) \in [0, T] \times \mathcal{X}$.

Wegen der Konstruktion des Filterprozesses $(\Pi_t)_{t \in [0, T]}$ und der damit verbundenen Dynamik des Preisprozesses (1.53) ist folgender Zusammenhang zwischen dem stochastischen Optimalsteuerungsproblem mit partieller Information (1.29) und dem Problem mit voller Information (1.68) festzustellen (siehe Theorem 2 in Rieder u. Bäuerle [55]):

Lemma 1.2.1. *Für alle $u \in \mathcal{U}(t, x)$, $(t, q, s, z) \in [0, T] \times \mathcal{Q} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Z}$, gilt*

$$J(t, q, s, z, \Pi_t; u) = J_0(t, q, s, z; u) \text{ und } V(t, q, s, z, \Pi_t) = V_0(t, q, s, z).$$

Beweis. Beweis siehe Lemma 1 und Theorem 2 in Rieder u. Bäuerle [55]. \square

Im Weiteren sollen einige Eigenschaften der Ziel- und Wertfunktionen untersucht werden. Damit die in (1.67) eingeführte Zielfunktion J wohl definiert ist, muss der darin enthaltene Erwartungswert existieren. Dies sichert die Integrabilitätsbedingung (1.66) in der Definition der Menge $\mathcal{U}(t, x)$ der zulässigen Markov-Steuerungsprozesse. Die nachfolgende Proposition zeigt, dass diese Bedingung im betrachteten Modell mit voller Information stets erfüllt ist.

Proposition 1.2.2. *Sei die Dynamik des Preisprozesses $(S_t)_{t \in [0, T]}$ wie in (1.60) gegeben. Dann ist folgende Integrabilitätsbedingung*

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T e^{-\rho(r-t)} |F(X_r^u, u_r)| dr + e^{-\rho(T-t)} |\Phi(X_T^u)| \mid X_t^u = x \right] < \infty$$

für einen gegebenen Anfangswert $x := (q, s, z, \pi) \in \mathcal{X}$, $t \in [0, T]$, und beliebige zulässige Steuerung $u \in \mathcal{U}(t, x)$ erfüllt und es gilt $|J(t, x; u)| < \infty$.

Für den Beweis der Proposition 1.2.2 benötigen wir die folgenden zwei Lemmata.

Lemma 1.2.3. *Der stochastische Prozess L genüge auf $[r, \infty)$, $r \geq 0$, der SDE*

$$dL_t = (A_t - D_t L_t) dt + \sigma dW_t, \quad L_r = l, \quad (1.69)$$

mit einem Wiener-Prozess W , $\sigma > 0$ und stochastischen Prozessen A und D mit beschränkten und stückweise stetigen Pfaden. Weiter sei $\Gamma(t) = \int_0^t D_s ds$ und $G(t) = \int_0^t e^{\Gamma(s)} A_s ds$. Dann gilt für $r = 0$

$$L_t = e^{-\Gamma(t)} \left(L_0 + G(t) + \sigma \int_0^t e^{\Gamma(s)} dW_s \right) \quad (1.70)$$

und für beliebiges $r \geq 0$

$$L_t = e^{-(\Gamma(t) - \Gamma(r))} \left(L_r + \int_r^t e^{\Gamma(s) - \Gamma(r)} A_s ds + \sigma \int_r^t e^{\Gamma(s) - \Gamma(r)} dW_s \right). \quad (1.71)$$

Beweis. Beweis siehe Anhang C.1. \square

Lemma 1.2.4. Sei $L = L^{r,l}$ der in (1.69) definierte stochastische Prozess mit dem Anfangswert $L_r = l$ und sei D nichtnegativ. Dann gilt

$$\mathbb{E}[(L_t^{r,l})^2] \leq C(1+l^2)(1+t^2), \quad \forall t \geq r, \quad C > 0. \quad (1.72)$$

Ist für eine positive Konstante C_D zusätzlich $D_t > C_D > 0$ erfüllt, dann gilt

$$\mathbb{E}[(L_t^{r,l})^2] \leq C(1+l^2), \quad \forall t \geq r, \quad C > 0. \quad (1.73)$$

Beweis. Beweis siehe Anhang C.2. □

Beweis von Proposition 1.2.2. Wegen der Beschränktheit von $q \in \mathcal{Q}$, $\pi \in \mathcal{P}$ und $y \in \mathcal{U}(q)$ können die linearen Wachstumsbedingungen (1.4) für die Gewinnfunktion $F(q, s, y)$ und die Endauszahlungsfunktion $\Phi(q, s)$ noch einfacher dargestellt werden:

$$|F(q, s, y)| \leq C_1(1 + |s|), \quad C_1 > 0, \quad |\Phi(q, s)| \leq K_1(1 + |s|), \quad K_1 > 0.$$

Sei nun $u \in \mathcal{U}(t, x)$ eine beliebige zulässige Steuerung. Dann ergibt sich für die Zielfunktion $J(t, x; u)$ folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} |J(t, x; u)| &= \left| \mathbb{E} \left[\int_t^T e^{-\rho(r-t)} F(Q_r^u, S_r, u_r) dr + e^{-\rho(T-t)} \Phi(Q_T^u, S_T) \mid X_t^u = x \right] \right| \\ &\leq \mathbb{E} \left[\int_t^T e^{-\rho(r-t)} |F(Q_r^u, S_r, u_r)| dr + e^{-\rho(T-t)} |\Phi(Q_T^u, S_T)| \mid X_t^u = x \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\int_t^T e^{-\rho(r-t)} C_1(1 + |S_r|) dr + e^{-\rho(T-t)} K_1(1 + |S_T|) \mid X_t^u = x \right] \\ &\leq C_1 \int_t^T e^{-\rho(r-t)} (1 + \mathbb{E}[|S_r|]) dr + K_1 e^{-\rho(T-t)} (1 + \mathbb{E}[|S_T|]). \end{aligned}$$

Die Drift $\hat{a}_S(s, \pi)$ der Preisprozessgleichung (1.53) genügt wegen der Beschränktheit von $\pi \in \mathcal{P}$ der Wachstumsbedingung (1.55). Da $(S_t)_{t \in [0, T]}$ der Markov-modulierte OU-Prozess (1.60) ist, dann gilt für ihn die Darstellung (1.69) mit $A_t = \bar{m}(\Pi_t)$ und $D_t = \bar{\kappa}(\Pi_t)$, wobei für den Prozess D wegen der Positivität der Steifigkeiten k_i , $i = 1, \dots, d$, $D_t \geq \min_{i=1, \dots, d} \kappa_i =: C_D > 0$ gilt. Diesbezüglich gilt für den Preisprozess (1.60) gemäß dem Lemma 1.2.4 die Abschätzung (1.73) für das zweite Moment. Aus der Lyapunov-Ungleichung (siehe Shiryaev [66, Kapitel II, Paragraph 6, Abschnitt 6]) folgt

$$\mathbb{E}[|S_r^{t,s}|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[(S_r^{t,s})^2]}$$

und somit die Abschätzung

$$\mathbb{E}[|S_r^{t,s}|] \leq \tilde{C}(1 + |s|), \quad \forall r \geq t, \quad \tilde{C} > 0, \quad (1.74)$$

für das erste absolute Moment des Preisprozesses, der zum Zeitpunkt t mit dem Anfangswert s startet. Dabei ist die Konstante \tilde{C} unabhängig von der Zeit t .

Dies erlaubt die letzte Ungleichung für $|J(t, x; u)|$ wie folgt umzuschreiben:

$$\begin{aligned} |J(t, x; u)| &\leq C_1 \int_t^T e^{-\rho(r-t)} \left(1 + \tilde{C}(1 + |s|)\right) dr + K_1 e^{-\rho(T-t)} \left(1 + \tilde{C}(1 + |s|)\right) \\ &= C_1 \frac{1}{\rho} (1 - e^{-\rho(T-t)}) \left(1 + \tilde{C}(1 + |s|)\right) + K_1 e^{-\rho(T-t)} \left(1 + \tilde{C}(1 + |s|)\right) \\ &\leq C(1 + |x|) < \infty, \quad C > 0. \end{aligned} \tag{1.75}$$

Somit gilt $|J(t, x; u)| < \infty$ für alle $(t, x) \in [0, T] \times \mathcal{X}$ und $u \in \mathcal{U}(t, x)$. \square

Die Wertfunktion V genügt der folgenden Wachstumsbedingung bezüglich der Zustandsvariablen x .

Theorem 1.2.5. *Sei die Dynamik des Preisprozesses $(S_t)_{t \in [0, T]}$ in (1.60) gegeben. Die Wertfunktion $V(t, x)$ des stochastischen Optimalsteuerungsproblems mit voller Information (1.68) ist stetig in $(t, x) \in [0, T] \times \mathcal{X}$ und es gilt $V(T, x) = \Phi(x)$. Es gibt eine positive Konstante $K > 0$, sodass für alle $(t, x) \in [0, T] \times \mathcal{X}$ die Wertfunktion $V(t, x)$ der linearen Wachstumsbedingung genügt:*

$$|V(t, x)| \leq K(1 + |x|). \tag{1.76}$$

Beweis. Beweis siehe Theorem 5 in Krylov [45, Abschnitt III.1].

Die lineare Wachstumsbedingung (1.76) folgt dabei unmittelbar aus der Abschätzung (1.75) der Proposition 1.2.2, die für alle $u \in \mathcal{U}(t, x)$, $\forall (t, x) \in [0, T] \times \mathcal{X}$, $T < \infty$, gültig ist. \square

Für das Problem mit unendlichem Zeithorizont ($T = \infty$) genügt der Zustandsprozess $(X_t^u)_{t \in [0, \infty)}$ demselben Kontrollsystem (1.65). Die Steuerungen $(u_t)_{t \in [0, \infty)}$ sind \mathbb{H} -adaptiert und liegen in der Menge der zulässigen Markov-Steuerungsprozesse:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(x) = \left\{ u = (u_t)_{t \in [0, \infty)} \mid u \text{ ist } \mathbb{H} - \text{progressiv messbar,} \right. \\ \left. u_t = w(X_t^u) \text{ für alle } t \in [0, \infty) \text{ und } w(x) \in U(q), \forall x \in \mathcal{X}, \right. \\ \left. \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\rho t} |F(X_t^u, u_t)| dt \mid X_0^u = x \right] < \infty \right\}. \end{aligned} \tag{1.77}$$

Die Ziel- und die Wertfunktion $J(x; u)$ bzw. $V(x)$ werden analog zu (1.10) bzw. (1.12) definiert:

$$J(x; u) = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\rho t} F(X_t^u, u_t) dt \mid X_0^u = x \right], \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad u \in \mathcal{U}(x), \tag{1.78}$$

bzw.

$$V(x) = \sup_{u \in \mathcal{U}(x)} J(x; u), \quad \forall x \in \mathcal{X}. \tag{1.79}$$

Analog zu Lemma 1.2.1 lässt sich auch für $T = \infty$ beweisen:

Lemma 1.2.6. Für alle $u \in \mathcal{U}(q, s, z)$, $(q, s, z) \in \mathcal{Q} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Z}$, gilt

$$J(q, s, z, \Pi_t; u) = J_0(q, s, z; u) \text{ und } V(q, s, z, \Pi_t) = V_0(q, s, z).$$

Aus Lemma 1.2.6 folgt, dass die Wertfunktion für das stochastische Optimalsteuerungsproblem mit partieller Information (1.31) ebenfalls die Wertfunktion für das Optimierungsproblem mit voller Information (1.79) ist.

Die nachfolgende Proposition zeigt, dass im betrachteten Modell mit voller Information die Integrabilitätsbedingung (1.77) stets erfüllt ist und somit die in (1.78) eingeführte Zielfunktion J wohl definiert ist.

Proposition 1.2.7. Sei die Dynamik des Preisprozesses $(S_t)_{t \in [0, \infty)}$ in (1.60) gegeben. Dann ist folgende Integrabilitätsbedingung

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\rho t} |F(X_t^u, u_t)| dt \mid X_0^u = x \right] < \infty$$

für einen gegebenen Anfangswert $x := (q, s, z, \pi) \in \mathcal{X}$ und beliebige zulässige Steuerung $u \in \mathcal{U}(x)$ erfüllt und es gilt $|J(x; u)| < \infty$.

Beweis. Der Beweis ist analog zu Proposition 1.2.2, wenn man $T \rightarrow \infty$ gehen lässt und beruht auf der Abschätzung $\mathbb{E}[|S_t^{0,s}|] \leq \tilde{C}(1 + |s|)$ für das erste absolute Moment des Preisprozesses (1.60) für alle t , da die Konstante \tilde{C} in (1.74) von t unabhängig ist. \square

Theorem 1.2.8. Sei die Dynamik des Preisprozesses $(S_t)_{t \in [0, \infty)}$ in (1.60) gegeben. Die Wertfunktion $V(x)$ des stochastischen Optimalsteuerungsproblems mit voller Information (1.79) ist stetig in $x \in \mathcal{X}$. Es gibt eine positive Konstante $K > 0$, sodass für alle $x \in \mathcal{X}$ die Wertfunktion $V(x)$ der linearen Wachstumsbedingung genügt:

$$|V(x)| \leq K(1 + |x|). \quad (1.80)$$

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis des Theorems 5 in Krylov [45, Abschnitt III.1]. \square

1.2.2 Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung

Die oben aufgestellten stochastischen Optimalsteuerungsprobleme mit voller Information für den Fall endlichen und unendlichen Zeithorizontes (1.68) bzw. (1.79) werden im Weiteren mit der Anwendung von Methoden der dynamischen Programmierung gelöst. Hierfür werden für beide Optimierungsprobleme die zugehörigen HJB-Gleichungen hergeleitet.

Zuerst betrachten wir das stochastische optimale Steuerungsproblem (1.68) für einen Energiespeicher mit einem endlichen Zeithorizont ($T < \infty$). Ausgangspunkt der im Folgenden eingesetzten Lösungsmethode ist das *Prinzip der dynamischen Programmierung (PDP)*. Dieses besagt, dass für alle $(t, x) \in [0, T] \times \mathcal{X}$ und $u \in \mathcal{U}(t, x)$, sowie jede beliebige \mathbb{H} -Stopzeit $\tau : \Omega \rightarrow [t, T]$ gilt

$$V(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{U}(t, x)} \mathbb{E} \left[\int_t^\tau e^{-\rho(r-t)} F(X_r^u, u_r) dr + e^{-\rho(\tau-t)} V(\tau, X_\tau^u) \mid X_t^u = x \right]. \quad (1.81)$$

Unter den gemachten Annahmen, insbesondere dass für jedes $y \in \mathcal{U}(q)$, $q \in \mathcal{Q}$, die Drift- und Diffusionskoeffizienten a bzw. b der SDE (1.64), sowie der laufende Gewinn F und die Endauszahlungsfunktion Φ den Wachstums- und Lipschitz-Bedingungen genügen (siehe Bedingungen (1.2)-(1.3) der Annahme 1.1.2 bzw. Bedingungen (1.4)-(1.5) der Annahme 1.1.3), ist das PDP für das gestellte stochastische Optimalsteuerungsproblem (1.68) erfüllt (siehe Krylov [45, Abschnitt III.1, Theorem 6]).

Sei nun $V \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathcal{X})$. Weiter gelte folgende Integrabilitätsbedingung

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\rho t} \left| \frac{\partial}{\partial t} V(t, X_t^u) + a_1(X_t^u, u_t) \frac{\partial}{\partial q} V(t, X_t^u) + \mathcal{L}V(t, X_t^u) \right| dt \right. \\ \left. + \int_0^T e^{-\rho t} \left\| b(X_t^u)^\top \nabla_x V(t, X_t^u) \right\|^2 dt + e^{-\rho T} \left| \Phi(X_T^u) \right| \mid X_0^u = x_0 \right] < \infty. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Der *infinitesimale Generator* des Zustandsprozesses $(X_t^u)_{t \in [0, T]}$ aus (1.64) ist

$$\frac{\partial}{\partial t} + a_1(x, y) \frac{\partial}{\partial q} + \mathcal{L}$$

mit $a_1(x, y) = \psi(x, y)$ und dem Differentialoperator 2. Ordnung

$$\mathcal{L} = \sum_{i=2}^D a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^D (b(x)b(x)^\top)_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (1.83)$$

wobei \mathcal{L} nur die zugehörigen Terme bezüglich der nicht steuerbaren Zustandsvariablen s, z und π enthält. Dann kann man für das Optimierungsproblem (1.68) die HJB-Gleichung herleiten (siehe Fleming u. Soner [26, Abschnitt IV.3], Pham [53, Abschnitt 3.4.1]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} V(t, x) + (\mathcal{L} - \rho)V(t, x) + \sup_{y \in \mathcal{U}(q)} \left\{ \psi(x, y) \frac{\partial}{\partial q} V(t, x) + F(x, y) \right\} = 0, \\ \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathcal{X}, \end{aligned} \quad (1.84)$$

mit der *Endbedingung*

$$V(T, x) = \Phi(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}. \quad (1.85)$$

Im Falle des unendlichen Zeithorizontes ($T = \infty$) gilt unter den gemachten Annahmen wie für den Fall $T < \infty$ das PDP (siehe z.B. Pham [53, Abschnitt 3.4.1]), das besagt, dass für alle $x \in \mathcal{X}$ und $u \in \mathcal{U}(x)$, sowie beliebige \mathbb{H} -Stoppzeit $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ die Bedingung

$$V(x) = \sup_{u \in \mathcal{U}(x)} \mathbb{E} \left[\int_0^\tau e^{-\rho t} F(X_t^u, u_t) dt + e^{-\rho \tau} V(X_\tau^u) \mid X_0^u = x \right] \quad (1.86)$$

erfüllt ist.

Sei $V \in \mathcal{C}^2(\mathcal{X})$ und es gelte folgende Integrierbarkeitsbedingung

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\rho t} \left| a_1(X_t^u, u_t) \frac{\partial}{\partial q} V(X_t^u) + \mathcal{L}V(X_t^u) \right| dt + \int_0^\infty e^{-\rho t} \left\| b(X_t^u)^\top \nabla_x V(X_t^u) \right\|^2 dt \mid X_0^u = x \right] < \infty. \quad (1.87)$$

Unter Verwendung des PDP (1.86) erhält man die HJB-Gleichung für das stochastische optimale Steuerungsproblem (1.79) im Falle $T = \infty$:

$$(\mathcal{L} - \rho)V(x) + \sup_{y \in U(q)} \left\{ \psi(x, y) \frac{\partial}{\partial q} V(x) + F(x, y) \right\} = 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}. \quad (1.88)$$

1.2.3 Optimale Strategie

Für das Steuerungsproblem mit endlichem Zeithorizont wird in (1.84) das folgende punktweise Optimierungsproblem

$$\sup_{y \in U(q)} H\left(y; x, \frac{\partial}{\partial q} V(t, x)\right) \quad \text{mit} \quad H(y) = H(y; x, \xi) = \psi(x, y)\xi + F(x, y) \quad (1.89)$$

zur Bestimmung eines Kandidaten für die optimale Markov-Steuerung $w^* := w^*(t, x)$, $(t, x) \in [0, T) \times \mathcal{X}$, gelöst.

Wegen der in (1.33) gegebenen Gestalt für den Wirkungsgrad $\eta_{\text{turb}}(q, y)$ als in y quadratische Funktion ist die Gewinnfunktion $F(q, s, \cdot)$ nach (1.38) für positive y (Ausströmen) ein kubisches Polynom mit Nullstellen in $y = 0$ und $\bar{y} = \frac{2P_{\text{theo}}}{c_0 q}$ (dort gilt $\eta_{\text{turb}}(q, \bar{y}) = 0$), sowie positiven Werten und einem eindeutigen Maximum im Intervall $(0, \bar{y})$. Es sei auch bemerkt, wenn $y \in (0, \bar{y})$ gilt, dann ist der Wirkungsgrad der Turbine $\eta_{\text{turb}}(q, y)$ nach der Bedingung (1.34) positiv.

Damit kann die Zielfunktion des punktweisen Optimierungsproblems (1.89)

$$H(y) = \psi(q, z, y) \frac{\partial}{\partial q} V(t, x) + F(q, s, y) \quad (1.90)$$

ebenfalls ein lokales Maximum im Inneren des Intervalls $(0, \bar{u}(q)]$ besitzen. Dieses ist dann neben der „Knickstelle“ $y = 0$ und den Randpunkten $\underline{u}(q)$, $\bar{u}(q)$ ein weiterer (vierter) extremwertverdächtiger Punkt.

Für $y < 0$ ist die Gewinnfunktion $F(q, s, \cdot)$ linear in y . Somit ist auch H in y linear.

Dagegen ergibt sich für $y \geq 0$ unter Verwendung der Darstellungen (1.21) und (1.38) für ψ und F folgende Darstellung für H :

$$H(y) = \mathfrak{h}(q)(-y + g_Z(q, z)) \frac{\partial}{\partial q} V(t, x) + c_F s(q - q_f^+) \eta_{\text{turb}}(q, y) y.$$

Der von q und y abhängige Wirkungsgrad $\eta_{\text{turb}}(q, y)$ hat nach (1.33) die Gestalt

$$\begin{aligned}\eta_{\text{turb}}(q, y) &= \eta_{\text{max}} \left(1 - \left(\frac{c_0 y q}{P_{\text{theo}}} - 1 \right)^2 \right) = \eta_{\text{max}} \left(2 \frac{c_0 q}{P_{\text{theo}}} y - \left(\frac{c_0 q}{P_{\text{theo}}} \right)^2 y^2 \right) \\ &= \eta_{\text{max}} (2\gamma y - \gamma^2 y^2)\end{aligned}$$

mit $\gamma = \frac{c_0 q}{P_{\text{theo}}}$. Damit erhält man

$$\begin{aligned}H(y) &= \mathfrak{h}(q)(-y + g_Z(q, z)) \frac{\partial}{\partial q} V(t, x) + c_F s(q - q_f^+) \eta_{\text{max}} (2\gamma y - \gamma^2 y^2) y \\ &= -\bar{a} y^3 + \bar{b} y^2 + \bar{c} y + \bar{d}.\end{aligned}$$

Dies ist ein Polynom 3. Grades mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}\bar{a} &= c_F s(q - q_f^+) \eta_{\text{max}} \gamma^2 > 0, & \bar{c} &= -\mathfrak{h}(q) \frac{\partial}{\partial q} V(t, x), \\ \bar{b} &= c_F s(q - q_f^+) \eta_{\text{max}} 2\gamma > 0, & \bar{d} &= g_Z(q, z) \mathfrak{h}(q) \frac{\partial}{\partial q} V(t, x),\end{aligned}$$

welches auch von $(0, \bar{y})$ auf \mathbb{R} fortgesetzt werden kann. Für die Ableitungen von H gilt

$$H'(y) = -3\bar{a} y^2 + 2\bar{b} y + \bar{c}, \quad H''(y) = -6\bar{a} y + 2\bar{b}, \quad H'''(y) = -6\bar{a} < 0.$$

Die notwendige Bedingung für ein Maximum $H'(y) = -3\bar{a} y^2 + 2\bar{b} y + \bar{c} = 0$ führt auf ein Nullstellenproblem für die quadratische Funktion $\bar{A} y^2 + \bar{B} y + \bar{C}$ mit

$$\begin{aligned}\bar{A} &= -3\bar{a} = -3c_F s(q - q_f^+) \eta_{\text{max}} \gamma^2 < 0, \\ \bar{B} &= 2\bar{b} = 4c_F s(q - q_f^+) \eta_{\text{max}} \gamma > 0, \\ \bar{C} &= \bar{c} = -\mathfrak{h}(q) \frac{\partial}{\partial q} V(t, x).\end{aligned}$$

Die formale Lösung liefert

$$y_{\pm} = -\frac{\bar{B}}{2\bar{A}} \pm \sqrt{\frac{\bar{B}^2}{4\bar{A}^2} - \frac{\bar{C}}{\bar{A}}}$$

mit

$$\begin{aligned}-\frac{\bar{B}}{2\bar{A}} = \frac{2\bar{b}}{3\bar{a}} &= \frac{2}{3\gamma}, \\ \frac{\bar{B}^2}{4\bar{A}^2} - \frac{\bar{C}}{\bar{A}} &= \frac{4}{9\gamma^2} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{\mathfrak{h}(q) \frac{\partial}{\partial q} V(t, x)}{c_F s(q - q_f^+) \eta_{\text{max}}} \right) = \frac{4}{9\gamma^2} (1 - \delta),\end{aligned}$$

wobei

$$\delta = \frac{3}{4} \frac{\mathfrak{h}(q) \frac{\partial}{\partial q} V(t, x)}{c_F s(q - q_f^+) \eta_{\text{max}}} \tag{1.91}$$

gilt.

Für $\delta < 1$ ergeben sich die zwei reellen Nullstellen $y_{\pm} = y_0(1 \pm \sqrt{1 - \delta})$, für $\delta = 1$ eine doppelte reelle Nullstelle $y_0 = \frac{2}{3\gamma}$ und für $\delta > 1$ keine reellen Nullstellen. Dabei ist die Nullstelle y_- nur für $\delta \in (0, 1)$ positiv.

An der Stelle y_0 gilt für die zweite Ableitung

$$H''(y_0) = -6\bar{a}y_0 + 2\bar{b} = 0.$$

Da $H'''(y_0) = -6\bar{a} < 0$ für alle y , ist also y_0 kein Extremum, sondern ein Wendepunkt. Weiterhin gilt für $y = y_{\pm}$

$$H''(y_{\pm}) = -6\bar{a}y_{\pm} + 2\bar{b} = \mp c_F s (q - q_f^+) y_0 \eta_{\max} \sqrt{1 - \delta}.$$

Für das gesuchte lokale Maximum von $H(y)$ wird in Hinblick auf $\delta \leq 1$ die hinreichende Bedingung $H''(y_{\pm}) < 0$ geprüft. In Abhängigkeit vom Energiepreis s und der partiellen Ableitung $\frac{\partial}{\partial q} V(t, x)$ ergeben sich folgende Fälle, die in der Tabelle 1.1 dargestellt sind.

Tabelle 1.1: Extremwerte von $H(y)$.

Extremum	Hinreichende Bedingung	Zusätzliche Bedingung
Maximumstelle y_+	$H''(y_+) < 0$	$s > 0$
Minimumstelle y_-	$H''(y_-) > 0$	$s > 0$
Maximumstelle y_-	$H''(y_-) < 0$	$s < 0, V_q < 0$
Minimumstelle y_+	$H''(y_+) > 0$	$s < 0, V_q < 0$

Somit gilt für $\delta \leq 1$, dass es für die (globale) Maximumstelle von $H(y)$ auf dem Intervall $[\underline{u}(q), \bar{u}(q)]$ neben den beiden Randpunkten $\underline{u}(q)$ und $\bar{u}(q)$, sowie $y = 0$ noch den vierten Kandidaten y_+ bzw. y_- in Abhängigkeit von s und $\frac{\partial}{\partial q} V(t, x)$ gibt. Für die Lösung des punktwisen Optimierungsproblems (1.89) sind daher lediglich die Werte der Zielfunktion H aus (1.90) in diesen vier Stellen weiter zu untersuchen.

Für die praktischen Anwendungen ist der Fall $\frac{\partial}{\partial q} V(t, x) > 0$ relevant, der besagt, dass der mit der Handhabung des Speichers assoziierte Zahlungsstrom umso größer ist, je größer der Inhalt des Speichers ist. Von daher wird neben $\underline{u}(q)$, $\bar{u}(q)$ und $y = 0$ nur das innere Maximum y_+ untersucht. Für diesen Fall wird in Anhang A der Kandidat für optimale Strategie $w^*(t, x)$, deren graphische Darstellung in Abbildung 1.4 zu sehen ist, für alle $(t, x) \in [0, T) \times \mathcal{X}$ und $s \in \mathcal{S}$ hergeleitet (siehe Formeln (A.9)-(A.11)):

$$w^*(t, x) = \begin{cases} \underline{u}(q), & s < S_P(t, x), \\ 0, & S_P(t, x) \leq s \leq S_A^a(t, x), \\ y_+(t, x), & S_A^a(t, x) < s \leq S_A^b(t, x), \\ \bar{u}(q), & s > S_A^b(t, x), \end{cases} \quad (1.92)$$

mit

$$y_+(t, x) = \frac{2P_{\text{theo}}}{3c_0q} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{S_+(t, x)}{s}} \right), \quad s > S_+(t, x),$$

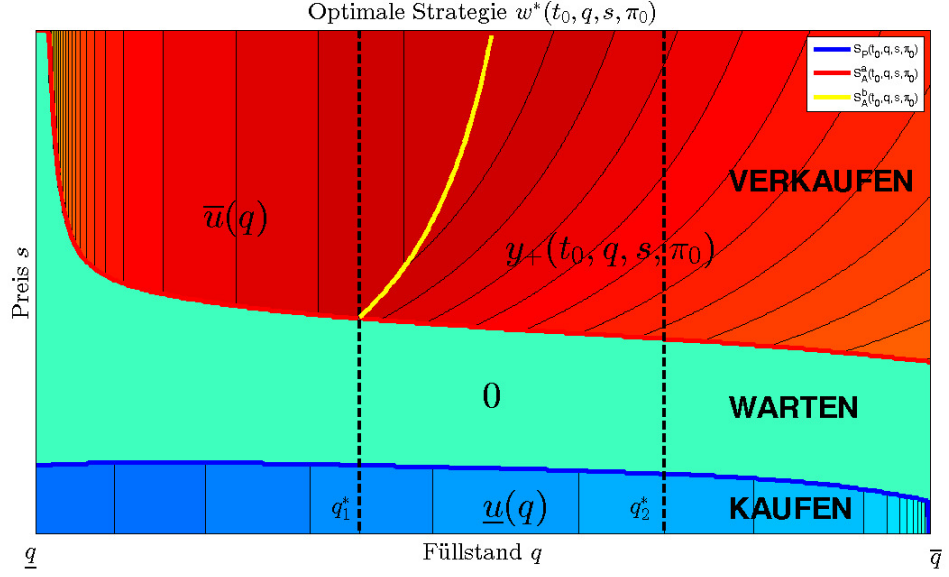


Abbildung 1.4: Optimale Strategie $w^*(t_0, q, s, \pi_0)$ als Funktion von q und s für fixierte t_0 und π_0 .

und

$$S_+(t, x) = \frac{3}{4} \frac{\mathfrak{h}(q)}{c_F(q - q_f^+) \eta_{\max}} \frac{\partial}{\partial q} V(t, x),$$

sowie den kritischen Preisen beim Pumpen

$$S_P(t, x) = \frac{\mathfrak{h}(q) \eta_{\text{pump}}}{c_F(q + q_f^-)} \frac{\partial}{\partial q} V(t, x)$$

bzw. Ablassen

$$\begin{aligned} S_A^a(t, x) &= S_A^b(t, x) = \frac{3S_+(t, x)}{(1+\mathfrak{f}(q))(2-\mathfrak{f}(q))}, & q \in [q, q_1^*), \\ S_A^a(t, x) &= \frac{4}{3}S_+(t, x), \quad S_A^b(t, x) = \frac{S_+(t, x)}{(1-\mathfrak{f}(q))(1+\mathfrak{f}(q))}, & q \in [q_1^*, q_2^*), \\ S_A^a(t, x) &= \frac{4}{3}S_+(t, x), \quad S_A^b(t, x) = +\infty, & q \in (q_2^*, \bar{q}], \end{aligned}$$

für alle $(t, x) \in [0, T) \times \mathcal{X}$ und mit den kritischen Füllständen

$$q_1^* = \begin{cases} \mathfrak{f}^{-1}(\frac{1}{2}) \wedge \bar{q}, & \mathfrak{f}(\bar{q}) \geq \frac{1}{2}, \\ \bar{q}, & \mathfrak{f}(\bar{q}) < \frac{1}{2}, \end{cases} \quad q_2^* = \begin{cases} \mathfrak{f}^{-1}(1) \wedge \bar{q}, & \mathfrak{f}(\bar{q}) \geq 1, \\ \bar{q}, & \mathfrak{f}(\bar{q}) < 1. \end{cases}$$

Hier ist $\mathfrak{f} : [q, \bar{q}] \rightarrow [-1, 2]$ eine monoton wachsende, in (A.1) definierte Funktion

$$\mathfrak{f}(q) = \frac{3c_0q}{2P_{\text{theo}}} A_{\text{out}} \sqrt{2gq} \left(1 - e^{-\tilde{\alpha}(q-q)} \right) - 1,$$

für die es eine inverse Funktion $f^{-1} : [-1, 2] \rightarrow [\underline{q}, \bar{q}]$ gibt. Außerdem gelten $\bar{q} \leq f^{-1}(2)$ und $\underline{q} > q_f^+ > 0$. Für mehr Details siehe Anhang A.

Bemerkung 1.2.9. Der mathematischen Einfachheit halber wird im Modell auch zugelassen, dass das Wasser in den Speicher nicht nur mit der maximalen Nennleistung der Pumpe P_{pump} und der maximalen Rate des Volumenstromes $-\underline{u}(q)$ hineingepumpt wird, sondern auch mit einer Zwischenleistung, was mit anderen Worten bedeutet, dass der Speicher auch mit beliebiger Rate aus dem Intervall $[\underline{u}(q), 0]$ befüllt werden kann. Die in (1.92) gefundene Darstellung der optimalen Steuerung zeigt, dass solche Zwischenwerte aus $(\underline{u}(q), 0)$ niemals optimal sind. Dies ist eine Folge der Annahme, dass der Wirkungsgrad der Pumpe η_{pump} konstant ist und somit die Funktion $H(y)$ im punktweisen Optimierungsproblem (1.90) für $y < 0$ linear ist.

Falls anstelle des Optimierungsproblems mit endlichem Zeithorizont (1.68) die Aufgabe (1.79) für den Fall des unendlichen Zeithorizontes betrachtet wird, so liefert die Lösung des punktweisen Optimierungsproblems

$$\sup_{y \in U(q)} \left\{ \psi(x, y) \frac{\partial}{\partial q} V(x) + F(x, y) \right\}$$

in der HJB-Gleichung (1.88) einen Kandidaten $w^* := w^*(x)$, $\forall x \in \mathcal{X}$, für die optimale stationäre Strategie. Dabei wird w^* genauso wie im Falle $T < \infty$ unter vier Werten $\underline{u}(q)$, 0 , $y_{\pm}(q)$ und $\bar{u}(q)$ nach der Formel (1.92) bestimmt.

1.3 Regularisierung

Für die Anwendung von Verifikationssätzen aus der Literatur (siehe z.B. Fleming u. Soner [25, Abschnitt IV.3, Theorem IV.3.1] und Pham [53, Abschnitt 3.5]) ist es erforderlich, dass die HJB-Gleichungen (1.84) und (1.88) eine klassische Lösung $V \in C^{1,2}([0, T] \times \mathcal{X})$ bzw. $V \in C^2(\mathcal{X})$ besitzen. Dabei besagen die Verifikationssätze, dass die Lösung der HJB-Gleichung die Wertfunktion des stochastischen optimalen Steuerungsproblems ist und die optimale Steuerung als Markov-Steuerung in der Form (1.92) gewählt werden kann. Die Existenz einer klassischen Lösung kann jedoch wegen der fehlenden gleichmäßigen Elliptizität des Differentialoperators in (1.84) bzw. (1.88) nicht garantiert werden. Dies ist leicht aus der SDE (1.65) zu sehen, bei der die Brownsche Bewegung in erster Gleichung für Q^u entfällt. Außerdem werden die SDEs für den Preis und die $d - 1$ Filtervariablen nur von einem einzigen Wiener-Prozess \widetilde{W}^S (Innovationsprozess) angetrieben.

Anstelle der Existenz der klassischen Lösung der HJB-Gleichung kann auch das Konzept der Viskositätslösungen (siehe z.B. Fleming u. Soner [25, Kapitel V] und Pham [53, Kapitel 4]) betrachtet werden. Es liefert allerdings keine explizite Form der optimalen Strategie und soll daher hier nicht weiter verfolgt werden.

Außerdem folgt aus der Formel (1.92), dass die optimale Strategie w^* vom Bang-Bang-Typ ist. Somit hat der zur optimalen Steuerung assoziierte Zustand X^{u^*} in (1.64) einen unstetigen Driftkoeffizienten $a(x, y)$ (d.h. $\psi(q, z, y)$ in der SDE (1.65) ist unstetig). Weiterhin ist der Diffusionskoeffizient $b(x)$ degeneriert. Dies führt zu einem delikaten mathematischen Problem, das

in der Überprüfung der Zulässigkeit des optimalen Steuerungsprozesses u^* besteht und dessen Lösung in Leobacher, Szölgyenyi u. Thonhauser [48] und Shardin u. Szölgyenyi [64] studiert wird. In diesen Arbeiten wird gezeigt, unter welchen Bedingungen die SDEs mit einer unstetigen Drift und mit einer degenerierten Diffusion eine eindeutige starke Lösung haben.

Es wurde schon oben erwähnt, dass der Differentialoperator der HJB-Gleichung nicht elliptisch ist. Um dieses Problem zu überwinden, wird in der Literatur (siehe z.B. Fleming u. Soner [25, Abschnitt IV.6, Lemma IV.6.3], Frey, Gabih u. Wunderlich [30] und Krylov [45, Abschnitt 4.6]) vorgeschlagen, die optimalen Steuerungsprobleme (1.84) und (1.88) durch regularisierte Versionen zu ersetzen. Im Weiteren wird eine spezielle Variante der in [30, Abschnitt 7] eingeführten Regularisierungsprozedur angewendet, bei der neue, von W^Z und \widetilde{W}^S unabhängige Wiener-Prozesse $B^Q, B^{(1)}, \dots, B^{(d-1)}$ eingeführt werden, um die Elliptizität in (1.65) herzustellen, und bei der die Menge der vom aktuellen Zustand abhängigen zulässigen Steuerungswerte $U(q)$ durch eine kompakte, die ursprüngliche Menge $U(q)$ enthaltene Menge $U_M = [\underline{M}_u, \overline{M}_u]$ (siehe (1.23)) ersetzt wird. Das Ersetzen der zustandsabhängigen Menge $U(q)$ mit $q \in \mathcal{Q}$ durch U_M erlaubt, die klassischen Resultate der stochastischen Optimalsteuerungstheorie anzuwenden, die von einer vom Zustand unabhängigen Menge der zulässigen Steuerungswerte ausgehen.

Nachfolgend werden die regularisierten HJB-Gleichungen für das stochastische Optimalsteuerungsproblem eines Pumpspeichers sowohl mit einem endlichen als auch unendlichen Zeithorizont hergeleitet.

1.3.1 Endlicher Zeithorizont

Die Idee einer Regularisierungsprozedur besteht darin, in die SDE für die Füllhöhe Q^u und die SDE für die Filterwahrscheinlichkeit Π aus (1.65) einen eindimensionalen Störterm $\frac{1}{\sqrt{m}}dB_t^Q$ und einen $(d-1)$ -dimensionalen Störterm $\frac{1}{\sqrt{m}}(dB_t^{(1)}, \dots, dB_t^{(d-1)})^\top$ mit $m \in \mathbb{N}$ einzuführen. Damit verlassen die Prozesse $(Q_t^u)_{t \in [0, T]}$ und $(\Pi_t)_{t \in [0, T]}$ die ursprünglichen kompakten Mengen \mathcal{Q} bzw. \mathcal{P} und nehmen nun Werte in ganz \mathbb{R} bzw. \mathbb{R}^{d-1} an. Dies führt zur Erweiterung des Zustandsraumes von $\mathcal{X} = \mathcal{Q} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Z} \times \mathcal{P}$ zu $\widetilde{\mathcal{X}} = \mathbb{R} \times \mathcal{S} \times \mathcal{Z} \times \mathbb{R}^{d-1}$. Außerdem wird eine Modifikation der Definition der Koeffizienten a und b , der Menge der zulässigen Steuerungswerte $U(q)$ und der Menge der zulässigen Markov-Steuerungsprozesse $\mathcal{U}(t, x)$ erforderlich, welche nachfolgend beschrieben wird.

Sei für eine generische Menge $\Theta \subset \mathbb{R}^n$

$$\text{dist}(\theta, \Theta) = \inf\{|\theta - \bar{\theta}|_\infty \mid \bar{\theta} \in \Theta\}, \quad \theta \in \mathbb{R}^n,$$

ein Distanzmaß, das mittels der sup-Norm $|\cdot|_\infty$ den kleinsten Abstand eines Punktes $\theta \in \mathbb{R}^n$ zur Menge Θ angibt. Nun definiert man für $\varepsilon_q > 0$ und $\varepsilon_\pi > 0$ die kompakten Mengen

$$\mathcal{Q}_\varepsilon = [\underline{q} - \varepsilon_q, \bar{q} + \varepsilon_q] \supset \mathcal{Q} \quad \text{und} \quad \mathcal{P}_\varepsilon = \left\{ \pi \in \mathbb{R}^{d-1} \mid \text{dist}(\pi, \mathcal{P}) \leq \varepsilon_\pi \right\} \supset \mathcal{P}.$$

Da der Prozess $(Q_t^u)_{t \in [0, T]}$ durch die Regularisierung Werte in ganz \mathbb{R} annehmen kann, wird die Definition der Menge $U(q)$ der zulässigen Steuerungswerte (1.23) ebenfalls auf ganz \mathbb{R}

erweitert und als $\tilde{U}(q) = [\underline{u}(q), \tilde{u}(q)]$ mit

$$\begin{aligned}\tilde{u}(q) &:= \begin{cases} \underline{u}(q) \left(1 - \frac{\text{dist}(q, \mathcal{Q})}{\varepsilon_q}\right) & , \quad q \in [\underline{q} - \varepsilon_q, \bar{q}] , \\ 0 & , \quad \text{sonst} , \end{cases} \\ \tilde{u}(q) &:= \begin{cases} \bar{u}(q) \left(1 - \frac{\text{dist}(q, \mathcal{Q})}{\varepsilon_q}\right) & , \quad q \in [\underline{q}, \bar{q} + \varepsilon_q] , \\ 0 & , \quad \text{sonst} , \end{cases}\end{aligned}$$

definiert, wie es die Abbildung 1.5 zeigt. Es sei auch bemerkt, dass stets Konstanten \underline{M}_u und \overline{M}_u existieren, für die $\tilde{U}(q) \subset U_M = [\underline{M}_u, \overline{M}_u]$, $\forall q \in \mathbb{R}$, gilt. Für $q \in \mathcal{Q}$ stimmen die Mengen $U(q)$ und $\tilde{U}(q)$ überein. Außerhalb von \mathcal{Q}_ε ist die Steuerung immer gleich Null. Nach Konstruktion genügen die Funktionen \underline{u} und \tilde{u} für alle $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ der Lipschitz-Bedingung

$$\max\{|\underline{u}(q_1) - \underline{u}(q_2)|, |\tilde{u}(q_1) - \tilde{u}(q_2)|\} \leq C_u |q_1 - q_2|, \quad C_u > 0. \quad (1.93)$$

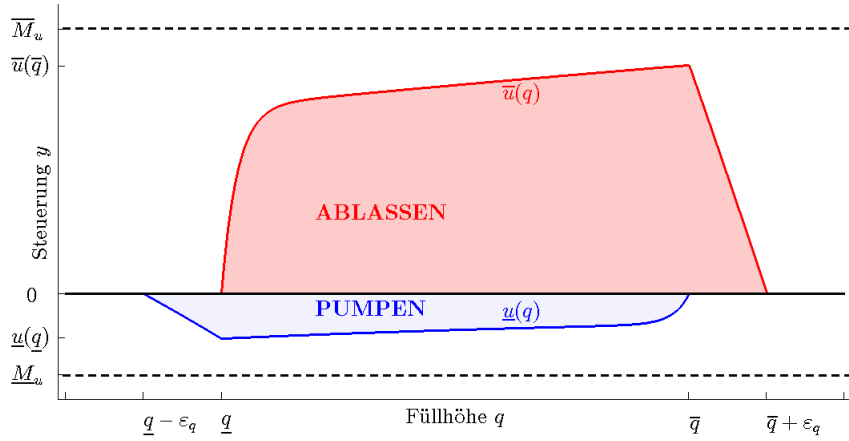


Abbildung 1.5: Die Menge der zulässigen Steuerungswerte $\tilde{U}(q)$ für den regularisierten Fall.

Weiterhin soll folgende Abschneidefunktion $\mathfrak{T} : U_M \times \mathbb{R} \rightarrow U_M$ eingeführt werden:

$$\mathfrak{T}(y, q) = \begin{cases} y, & y \in [\underline{u}(q), \tilde{u}(q)], \\ \tilde{u}(q), & y \in (\tilde{u}(q), \overline{M}_u], \\ \underline{u}(q), & y \in [\underline{M}_u, \underline{u}(q)], \end{cases} \quad (1.94)$$

wobei $\mathfrak{T}(y, q) \in \tilde{U}(q)$, $\forall q \in \mathbb{R}$, und $\mathfrak{T}(y, q) \in U(q)$, $\forall q \in \mathcal{Q}$, gilt.

Die Definition der Koeffizientenfunktion ψ aus der ODE (1.21) für die Füllhöhe wird nun für alle $q \in \mathbb{R}$ und $y \in U_M$ wie folgt erweitert:

$$\tilde{\psi}(q, z, y) := \tilde{h}(q)(-\mathfrak{T}(y, q) + \tilde{g}_Z(q, z)), \quad q \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathcal{Z}, \quad y \in U_M.$$

Die Definition der in (1.21) enthaltenen Querschnittsfläche des oberen Speicherbeckens $A(q)$ wird auf \mathbb{R} durch $\tilde{A}(q) = A((q \wedge \bar{q}) \vee \underline{q})$ ausgedehnt, sodass $\tilde{h}(q) = \frac{c_P}{\tilde{A}(q)}$, $q \in \mathbb{R}$, gilt.

Da nun q Werte aus ganz \mathbb{R} annimmt, wird die in der ODE (1.21) für den Füllstand Q enthaltene Funktion $g_Z(q, z)$ aus (1.19) für alle $q \in \mathbb{R}$ wie folgt modifiziert:

$$\tilde{g}_Z(q, z) = \tilde{I}_+(q, z) \tilde{I}_-(q, z) \cdot z$$

mit

$$\tilde{I}_+(q, z) := \begin{cases} I_+(q, z) & , \quad q < \bar{q}, \\ 0 & , \quad \text{sonst}, \end{cases}$$

$$\tilde{I}_-(q, z) := \begin{cases} I_-(q, z) & , \quad q > \underline{q}, \\ 0 & , \quad \text{sonst}. \end{cases}$$

Für $q \notin \mathcal{Q}_\varepsilon$ erhält man $\tilde{U}(q) = \{0\}$, woraus nach der Definition von $\tilde{g}_Z(q, z)$ unmittelbar $\tilde{\psi}(q, z, y) = 0$ folgt. Außerdem ist die Funktion $g_Z(q, z)$ gleich $\tilde{g}_Z(q, z)$ für alle $(q, z) \in [\underline{q}, \bar{q}] \times \mathcal{Z}$.

Schließlich erweitern wir die Definition der von der Filtervariablen π abhängigen Koeffizienten α und β aus der Filtergleichung und a_S aus der Preisgleichung von \mathcal{P} auf ganz \mathbb{R}^{d-1} und setzen

$$\tilde{\alpha}(\pi) := \begin{cases} \alpha(\pi) \left(1 - \frac{\text{dist}(\pi, \mathcal{P})}{\varepsilon_\pi}\right), & \pi \in \mathcal{P}_\varepsilon, \\ 0, & \pi \in \mathbb{R}^{d-1} \setminus \mathcal{P}_\varepsilon. \end{cases}$$

Für $\pi \in \mathcal{P}$ stimmen die Driftkoeffizienten $\alpha(\pi)$ und $\tilde{\alpha}(\pi)$ miteinander überein. Analog schreibt man auch den Diffusionskoeffizienten $\tilde{\beta}(s, \cdot)$ und die Drift $\tilde{a}_S(s, \cdot)$ in der Preisprozessgleichung für $s \in \mathcal{S}$ und $\pi \in \mathbb{R}^{d-1}$ um.

Nun kann man durch die Einführung des d -dimensionalen Wiener-Prozesses $(\tilde{B}_t)_{t \in [0, T]}$ mit $\tilde{B} := (B^Q, B^{(1)}, \dots, B^{(d-1)})^\top$ die regularisierte Version der SDE (1.64) mit den Drift- und Diffusionskoeffizienten $\tilde{a} : \mathcal{X} \times U_M \rightarrow \mathbb{R}^{d+2}$ und $\tilde{b} : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^{(d+2) \times 2}$ formulieren als

$$d^m X_t^u = \tilde{a}({}^m X_t^u, u_t) dt + \tilde{b}({}^m X_t^u) dW_t + \frac{1}{\sqrt{m}} \underline{\gamma} d\tilde{B}_t, \quad (1.95)$$

wobei $(\tilde{B}_t)_{t \in [0, T]}$ der d -dimensionale, von $(W_t)_{t \in [0, T]}$ unabhängige Wiener-Prozess,

$$\underline{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_q & \mathbf{0}_{1 \times (d-1)} \\ \mathbf{0}_{2 \times 1} & \mathbf{0}_{2 \times (d-1)} \\ \mathbf{0}_{(d-1) \times 1} & \gamma_\pi \mathbf{I}_{d-1} \end{pmatrix}$$

und $m \in \mathbb{N}$ ist. Die positiven Konstanten $\gamma_q > 0$ und $\gamma_\pi > 0$ in der Matrix $\underline{\gamma}$ sind Skalierungsfaktoren.

Komponentenweise lässt sich SDE (1.95) für den regularisierten Prozess $({}^m X_t^u)_{t \in [0, T]}$ mit $(q, s, z, \pi) \in \tilde{\mathcal{X}}$ analog zu (1.65) so darstellen:

$$\begin{aligned} d^m Q_t^u &= \tilde{\psi}({}^m Q_t^u, Z_t, u_t) dt + \frac{\gamma_q}{\sqrt{m}} dB_t^Q, & {}^m Q_0^u &= q_0, \\ d^m S_t &= \tilde{a}_S({}^m S_t, {}^m \Pi_t) dt + b_S({}^m S_t) d\tilde{W}_t^S, & {}^m S_0 &= s_0, \\ dZ_t &= a_Z(Z_t) dt + b_Z(Z_t) dW_t^Z, & Z_0 &= z_0, \\ d^m \Pi_t &= \tilde{\alpha}({}^m \Pi_t) dt + \tilde{\beta}({}^m S_t, {}^m \Pi_t) d\tilde{W}_t^S + \frac{\gamma_\pi}{\sqrt{m}} dB_t, & {}^m \Pi_0 &= \pi_0. \end{aligned} \quad (1.96)$$

Somit wird nun der regularisierte Prozess ${}^m X^u$ durch die $(d+2)$ -dimensionale Brownsche Bewegung mit $B^Q, \tilde{W}^S, W^Z, B^{(1)}, \dots, B^{(d-1)}$ getrieben.

Im Weiteren ist folgende Abschätzung für den regularisierten Zustandsprozess $({}^m X_t^u)_{t \in [0, T]}$ erforderlich:

Lemma 1.3.1. *Sei die Dynamik des Preisprozesses $(S_t)_{t \in [0, T]}$ wie in (1.60) gegeben. Für das zweite Moment des regularisierten Zustandsprozesses $({}^m X_t^u)_{t \in [0, T]}$, welcher komponentenweise in (1.96) definiert ist, gilt*

$$\mathbb{E} \left[|{}^m X_t^{r,x}|^2 \right] \leq K(1 + |x|^2)(1 + t^2), \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \tilde{\mathcal{X}}, \quad K > 0. \quad (1.97)$$

Beweis. Der regularisierte Driftkoeffizient \tilde{a}_S in der Preisprozessgleichung der SDE (1.96) lässt sich gemäß der SDE (1.60) und der Darstellung (1.69) als $\tilde{a}_S({}^m S_t, {}^m \Pi_t) = A_t - D_t {}^m S_t$ mit

$$\begin{aligned} A_t &= \bar{m}({}^m \Pi_t) \left(\left(1 - \frac{\text{dist}({}^m \Pi_t, \mathcal{P})}{\varepsilon_\pi} \right) \vee 0 \right), \\ D_t &= \bar{\kappa}({}^m \Pi_t) \left(\left(1 - \frac{\text{dist}({}^m \Pi_t, \mathcal{P})}{\varepsilon_\pi} \right) \vee 0 \right), \end{aligned} \quad (1.98)$$

definieren, weshalb der Prozess D_t nichtnegativ ist. Aus Lemma 1.2.4 folgt mit der Abschätzung (1.72) für das zweite Moment des regularisierten Preisprozesses ${}^m S$:

$$\mathbb{E} \left[({}^m S_t^{r,s})^2 \right] \leq C_s(1 + s^2)(1 + t^2), \quad C_s > 0. \quad (1.99)$$

Weiter kann man folgende Abschätzung

$$\mathbb{E} \left[|{}^m \Pi_t^{r,\pi}|^2 \right] \leq C_\pi(1 + |\pi|^2)(1 + t), \quad C_\pi > 0, \quad (1.100)$$

für den regularisierten Filterprozess ${}^m \Pi$ zeigen.

Hierzu bezeichne $\tau(t) = \sup\{s \mid s \geq r, {}^m \Pi_s \notin \mathcal{P}_\varepsilon\} \wedge t$ die letzte Austrittszeit des Prozesses ${}^m \Pi$ aus der Menge \mathcal{P}_ε im Intervall $[r, t]$. Falls ${}^m \Pi$ in diesem Zeitintervall nicht aus \mathcal{P}_ε austritt, dann ist $\tau(t) = t$ und $\|{}^m \Pi_s\| \leq C_P < \infty$ mit $C_P := \sup_{\pi \in \mathcal{P}_\varepsilon} \|\pi\|$.

Da die Dynamik von ${}^m \Pi$ außerhalb von \mathcal{P}_ε durch die SDE

$$d^m \Pi_t = \frac{\gamma_\pi}{\sqrt{m}} dB_t,$$

beschrieben wird, gilt

$${}^m\Pi_t = {}^m\Pi_{\tau(t)} + \frac{\gamma_\pi}{\sqrt{m}}(B_t - B_{\tau(t)})$$

und

$$\mathbb{E}\left[|{}^m\Pi_t|^2\right] \leq 2\mathbb{E}\left[|{}^m\Pi_{\tau(t)}|^2 + \frac{\gamma_\pi^2}{m}|B_t - B_{\tau(t)}|^2\right].$$

Außerdem gilt

$$\mathbb{E}\left[|B_t - B_{\tau(t)}|^2\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[|B_t - B_{\tau(t)}|^2 \mid \tau(t)\right]\right] = \mathbb{E}\left[(d-1)(t - \tau(t)) \mid \tau(t)\right] \leq (d-1)t.$$

Nach diesem Ausdruck folgt unmittelbar

$$\mathbb{E}\left[|{}^m\Pi_t|^2\right] \leq 2\left(C_{\mathcal{P}}^2 + \frac{\gamma_\pi^2}{m}(d-1)t\right) \leq C_\pi(1 + |\pi|^2)(1+t)$$

und somit ist die Bedingung (1.100) erfüllt. Analog zu (1.100) wird die Abschätzung

$$\mathbb{E}\left[({}^mQ_t^{r,q})^2\right] \leq C_q(1 + q^2)(1+t), \quad C_q > 0, \quad (1.101)$$

für das zweite Moment des Prozesses ${}^mQ^u$ hergeleitet.

Die erhaltenen Abschätzungen (1.99)-(1.101) zusammen mit der Bedingung (1.18) für den Zufluss liefern (1.97). □

Analog zum Abschnitt 1.2.1 lassen sich vier Spezialfälle für die Anzahl $\underline{D} \in \{2, 3, d+1, d+2\}$ der im Modell berücksichtigten Zustandsprozesse aus (1.96) unterscheiden. Seien der regularisierte stochastische Prozess ${}^mX^u$ und die Wiener-Prozesse W auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{H}, \mathbb{H}, \mathbb{P})$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_T$, mit der Beobachtungsfiltration $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_t)_{t \in [0, T]}$ definiert. Dann entstehen folgende Modelle :

– Modell mit Zufluss und nicht direkt beobachtbarem Faktorprozess:

$$\begin{aligned} \underline{D} &:= d+2 \text{ mit } \mathcal{H}_t := \mathcal{F}_t^{mQ} \vee \mathcal{F}_t^{mS} \vee \mathcal{F}_t^Z \vee \mathcal{F}_t^{m\Pi}, \\ {}^mX^u &:= ({}^mQ^u, {}^mS, Z, {}^m\Pi^\top)^\top \text{ und } W := (B^Q, \widetilde{W}^S, W^Z, B^{(1)}, \dots, B^{(d-1)})^\top; \end{aligned}$$

– Modell ohne Zufluss und mit Faktorprozess:

$$\begin{aligned} \underline{D} &:= d+1 \text{ mit } \mathcal{H}_t := \mathcal{F}_t^{mQ} \vee \mathcal{F}_t^{mS} \vee \mathcal{F}_t^{m\Pi}, \\ {}^mX^u &:= ({}^mQ^u, {}^mS, {}^m\Pi^\top)^\top \text{ und } W := (B^Q, \widetilde{W}^S, B^{(1)}, \dots, B^{(d-1)})^\top; \end{aligned}$$

– Modell mit Zufluss und ohne Faktorprozess:

$$\underline{D} := 3 \text{ mit } \mathcal{H}_t := \mathcal{F}_t^{mQ} \vee \mathcal{F}_t^S \vee \mathcal{F}_t^Z, {}^mX^u := ({}^mQ^u, S, Z)^\top \text{ und } W := (B^Q, W^S, W^Z)^\top;$$

– Modell ohne Zufluss und Faktorprozess:

$$\underline{D} := 2 \text{ mit } \mathcal{H}_t := \mathcal{F}_t^{mQ} \vee \mathcal{F}_t^S, {}^mX^u := ({}^mQ^u, S)^\top \text{ und } W := (B^Q, W^S)^\top.$$

Die Menge der zulässigen Markov-Steuerungsprozesse wird nun analog zu (1.7) als

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_M(t, x) = \left\{ u = (u_r)_{r \in [t, T]} \mid u \text{ ist } \mathbb{H} - \text{progressiv messbar,} \right. \\ \left. u_r = w_M(r, {}^m X_r^u) \text{ und } w_M(r, x) \in U_M \text{ für alle } r \in [t, T], x \in \tilde{\mathcal{X}}, \right. \\ \left. \mathbb{E} \left[\int_t^T e^{-\rho(r-t)} |\tilde{F}({}^m X_r^u, u_r)| dr + e^{-\rho(T-t)} |\tilde{\Phi}({}^m X_T^u)| \mid {}^m X_t^u = x \right] < \infty \right\} \end{aligned} \quad (1.102)$$

eingeführt, wobei $w_M : [0, T] \times \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow U_M$ eine Borelfunktion mit Werten in U_M ist. Die in der Definition (1.102) enthaltenen Funktionen \tilde{F} und $\tilde{\Phi}$ sind die regularisierten Versionen der Gewinn- und Endauszahlungsfunktionen F bzw. Φ (für die Regularisierung von F und Φ siehe unten).

Das folgende Lemma zeigt, dass auch die Drift- und Diffusionskoeffizienten der regularisierten Zustandsgleichung (1.95) den Lipschitz- und Wachstumsbedingungen genügen.

Lemma 1.3.2. *Der Driftkoeffizient \tilde{a} und die Diffusionskoeffizienten \tilde{b} und $\frac{1}{\sqrt{m}}\underline{\gamma}$ in der regularisierten SDE (1.95) genügen einer linearen Wachstums- bzw. einer Lipschitz-Bedingung:*

- *Wachstumsbedingung: für alle $x \in \tilde{\mathcal{X}}$ existiert eine Konstante $C_G > 0$, sodass*

$$\sup_{y \in U_M} |\tilde{a}(x, y)| + |\tilde{b}(x)| \leq C_G(1 + |x|); \quad (1.103)$$

- *Lipschitz-Bedingung: für alle $x_1, x_2 \in \tilde{\mathcal{X}}$ existiert eine Konstante $C_L > 0$, sodass*

$$\sup_{y \in U_M} |\tilde{a}(x_1, y) - \tilde{a}(x_2, y)| + |\tilde{b}(x_1) - \tilde{b}(x_2)| \leq C_L |x_1 - x_2|. \quad (1.104)$$

Beweis. Die Matrix $\frac{1}{\sqrt{m}}\underline{\gamma}$ enthält konstante Einträge und von daher sind die Bedingungen (1.103)-(1.104) automatisch erfüllt. Die Koeffizienten a_Z und b_Z in der SDE (1.17) für den Zufluss, sowie die Diffusion b_S der mittels des OU-Prozesses modellierten Energiepreisgleichung genügen diesen Bedingungen gemäß den oben gemachten Annahmen (siehe Bedingungen (1.2)-(1.3) in der Annahme 1.1.2). Die modifizierten Koeffizienten \tilde{a}_S , $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ hängen nur von s und π ab, aber nicht von q und y . Für alle $x \in \mathcal{X}$ folgen die Bedingungen unmittelbar aus den Definitionen für \hat{a}_S , α und β (siehe Annahme 1.1.2 und Beziehung (1.55)). Wenn $x \in \tilde{\mathcal{X}} \setminus \mathcal{X}$ gilt, so erhält die Multiplikation dieser Funktionen mit der beschränkten und Lipschitz-stetigen Funktion $\left(1 - \frac{\text{dist}(\pi, \mathcal{P})}{\varepsilon_\pi}\right) \vee 0$ die Wachstums- und Lipschitz-Eigenschaften.

Für $\tilde{\psi}(q, z, y) = \tilde{h}(q)(-\mathfrak{T}(y, q) + \tilde{g}_Z(q, z))$, $\tilde{h}(q) = \frac{c_P}{A(q)}$, genügen die Funktionen \tilde{h} und \tilde{g}_Z dank der getätigten Regularisierungsprozedur auch diesen Bedingungen. Aus der Definition der Abschneidefunktion (1.94) und der Lipschitz-Bedingung (1.93) folgt für alle $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ und $y \in U_M$

$$|\mathfrak{T}(y, q_1) - \mathfrak{T}(y, q_2)| \leq \max\{|\tilde{u}(q_1) - \tilde{u}(q_2)|, |\tilde{u}(q_1) - \tilde{u}(q_2)|\} \leq C_u |q_1 - q_2|. \quad (1.105)$$

Aus (1.105) ergibt sich, dass $\mathfrak{T}(y, \cdot)$ der Lipschitz-Bedingung genügt (die Wachstumsbedingung ist wegen der Konstruktion von \mathfrak{T} erfüllt). Somit liefert das Produkt der Lipschitz-stetigen Funktionen \mathfrak{h} , \mathfrak{T} und \tilde{g}_Z (als Produkt der Lipschitz-stetigen Funktionen \tilde{I}_+ , \tilde{I}_- und z) die Lipschitzstetigkeit von $\tilde{\psi}$. Die lineare Wachstumsbedingung für $\tilde{\psi}$ ist offensichtlich auch erfüllt. \square

Für die nachfolgende Definition der regularisierten Varianten für die Ziel- und Wertfunktion ist es erforderlich, regularisierte Versionen der Gewinn- und Endauszahlungsfunktion F bzw. Φ aufzustellen. Dafür wird der Definitionsbereich der Gewinnfunktion F in (1.38) bezüglich q von $[\underline{q}, \bar{q}]$ auf ganz \mathbb{R} erweitert. Damit sie außerdem der Wachstums- und Lipschitz-Bedingungen (1.4)-(1.5) genügt, definiert man $\tilde{F} : \mathbb{R} \times \mathcal{S} \times U_M \rightarrow \mathbb{R}$ für das regularisierte Problem wie folgt:

$$\tilde{F}(x, y) = \tilde{F}(q, s, y) := (F(q, s, \mathfrak{T}(y, q)) \vee F_*(s)) \wedge F^*(s), \quad (q, s) \in \mathbb{R} \times \mathcal{S}, \quad y \in U_M,$$

mit

$$\begin{aligned} F_*(s) &= \min\{F(q, s, y) \mid q \in [\underline{q}, \bar{q}], y \in U(q)\}, \quad s \in \mathcal{S}, \\ F^*(s) &= \max\{F(q, s, y) \mid q \in [\underline{q}, \bar{q}], y \in U(q)\}, \quad s \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Für fixierten Preis $s_0 \in \mathcal{S}$ ist die Funktion $\tilde{F}(\cdot, s_0, \cdot)$ beschränkt auf $[\underline{q}, \bar{q}] \times U_M$ und stimmt mit F für alle $q \in [\underline{q}, \bar{q}]$, $y \in U(q)$, überein. Die regularisierte Endauszahlungsfunktion $\tilde{\Phi} : \mathbb{R} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ wird analog zu \tilde{F} definiert.

Im nächsten Lemma wird gezeigt, dass die regularisierten Funktionen \tilde{F} und $\tilde{\Phi}$ der linearen Wachstums- und Lipschitz-Bedingung genügen, wobei \tilde{F} nur im lokalen Sinne Lipschitz-stetig ist.

Lemma 1.3.3. *Die regularisierten Gewinn- und Endauszahlungsfunktionen \tilde{F} bzw. $\tilde{\Phi}$ genügen folgender Wachstums- bzw. Lipschitz-Bedingung:*

- *Wachstumsbedingung: für alle $x := (q, s, \pi) \in \tilde{\mathcal{X}}$ existiert eine Konstante $\overline{C}_G > 0$, sodass*

$$\sup_{y \in U_M} |\tilde{F}(x, y)| + |\tilde{\Phi}(x)| \leq \overline{C}_G(1 + |x|); \quad (1.106)$$

- *Lipschitz-Bedingung: für alle $x_1 := (q_1, s_1, \pi_1)$, $x_2 := (q_2, s_2, \pi_2) \in \tilde{\mathcal{X}}$ existiert eine Konstante $\overline{C}_L > 0$, sodass*

$$\begin{aligned} \sup_{y \in U_M} |\tilde{F}(x_1, y) - \tilde{F}(x_2, y)| &\leq \overline{C}_L(1 + |s_1|)|x_1 - x_2|, \\ |\tilde{\Phi}(x_1) - \tilde{\Phi}(x_2)| &\leq \overline{C}_L|x_1 - x_2|. \end{aligned} \quad (1.107)$$

Beweis. Die regularisierten Funktionen \tilde{F} und $\tilde{\Phi}$ genügen der linearen Wachstumsbedingung (1.106) wegen der für F und Φ verwendeten Annahme 1.1.3. Außerdem erbt $\tilde{\Phi}$ die Lipschitz-Bedingung (1.107) von der Funktion Φ . Da \tilde{F} für $q \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Q}_\varepsilon$ (wegen $\mathfrak{T}(y, q) = 0$) verschwindet, ist es hinreichend, die Lipschitz-Bedingung von \tilde{F} für $q_1, q_2 \in \mathcal{Q}_\varepsilon$ zu zeigen.

In Hinblick auf die Definition (1.38) der Gewinnfunktion F lässt sie sich als $F(q, s, y) = s \cdot \check{F}(q, y)$ darstellen, wobei \check{F} eine auf $\mathcal{Q}_\varepsilon \times \mathcal{U}_M$ Lipschitz-stetige Funktion ist, sodass für alle $q_1, q_2 \in \mathcal{Q}_\varepsilon$ und $y_1, y_2 \in \mathcal{U}_M$ eine Konstante $C_y > 0$ existiert und

$$|\check{F}(q_1, y_1) - \check{F}(q_2, y_2)| \leq C_y |y_1 - y_2| \quad (1.108)$$

gilt.

Somit ergibt sich unter Verwendung von Annahme 1.1.3 (siehe Lipschitz-Bedingung (1.5)) und die Bedingungen (1.105) und (1.108) die Abschätzung (1.107):

$$\begin{aligned} |F(x_1, \mathfrak{T}(y, q_1)) - F(x_2, \mathfrak{T}(y, q_2))| & \\ & \leq |F(x_1, \mathfrak{T}(y, q_1)) - F(x_1, \mathfrak{T}(y, q_2))| + |F(x_1, \mathfrak{T}(y, q_2)) - F(x_2, \mathfrak{T}(y, q_2))| \\ & \leq |s_1 \check{F}(x_1, \mathfrak{T}(y, q_1)) - s_1 \check{F}(x_1, \mathfrak{T}(y, q_2))| + C_2 |x_1 - x_2| \\ & \leq |s_1| C_y |\mathfrak{T}(y, q_1) - \mathfrak{T}(y, q_2)| + C_2 |x_1 - x_2| \\ & \leq |s_1| C_y C_u |q_1 - q_2| + C_2 |x_1 - x_2| \leq \bar{C}_L (1 + |s_1|) |x_1 - x_2|. \end{aligned}$$

□

Im Weiteren wird bei der Herleitung der HJB-Gleichung der allgemeine Fall $\underline{D} := d + 2$ betrachtet, welcher unterstellt, dass die Dynamik des Kontrollsystems durch den Füllstand des Speichers, den natürlichen Zufluss und den Markov-modulierten OU-Prozess mit einer in d Zuständen verweilenden Drift beschrieben wird. Die nachfolgenden Resultate gelten ebenfalls für die anderen, auf Seite 48 aufgeführten Fälle (ohne Zufluss bzw. Faktorprozess).

Die Ziel- und Wertfunktion $J^m : [0, T] \times \tilde{\mathcal{X}} \times \mathcal{U}_M \rightarrow \mathbb{R}$ bzw. $V^m : [0, T] \times \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathbb{R}$ für das Steuerungsproblem mit der regularisierten Zustandsgleichung (1.95) werden nun analog zum ursprünglichen Kontrollproblem wie in (1.67) und (1.68) definiert als

$$\begin{aligned} J^m(t, x; u) &= \mathbb{E} \left[\int_t^T e^{-\rho(r-t)} \tilde{F}({}^m X_r^u, u_r) dr + e^{-\rho(T-t)} \tilde{\Phi}({}^m X_T^u) \mid {}^m X_t^u = x \right], \\ (t, x) &\in [0, T] \times \tilde{\mathcal{X}}, \quad u \in \mathcal{U}_M(t, x), \end{aligned} \quad (1.109)$$

und

$$V^m(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{U}_M(t, x)} J^m(t, x; u), \quad (t, x) \in [0, T] \times \tilde{\mathcal{X}}. \quad (1.110)$$

Der infinitesimale Generator für den regularisierten Prozess $({}^m X_t^u)_{t \in [0, T]}$ aus (1.95) ist

$$\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\psi}(q, z, y) \frac{\partial}{\partial q} + {}^m \mathcal{L}$$

mit dem Differentialoperator 2. Ordnung

$${}^m \mathcal{L} = \sum_{i=2}^{d+2} \tilde{a}_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d+2} (\tilde{b}(x) \tilde{b}(x)^\top)_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\gamma_q^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\gamma_\pi^2}{2m} \sum_{i=4}^{d+2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \quad (1.111)$$

Falls $V^m \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \tilde{\mathcal{X}})$ und V^m und ${}^m X^u$ die Integrabilitätsbedingung (1.82) erfüllen, dann genügt die Wertfunktion V^m der HJB-Gleichung für das regularisierte stochastische Optimalsteuerungsproblem (1.110):

$$\frac{\partial}{\partial t} V^m(t, x) + ({}^m \mathcal{L} - \rho) V^m(t, x) + \sup_{y \in \mathcal{U}_M} \left\{ \tilde{\psi}(x, y) \frac{\partial}{\partial q} V^m(t, x) + \tilde{F}(x, y) \right\} = 0, \quad (1.112)$$

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times \tilde{\mathcal{X}},$$

$$V^m(T, x) = \tilde{\Phi}(x), \quad \forall x \in \tilde{\mathcal{X}}. \quad (1.113)$$

Dank der Regularisierungsprozedur ist der Differentialoperator ${}^m \mathcal{L}$ in (1.111) elliptisch, denn für alle $h \in \mathbb{R}^{d+2} \setminus \{0\}$ gilt

$$h^\top \left(\frac{1}{2} \tilde{b} \tilde{b}^\top + \frac{1}{2m} \underline{\gamma} \underline{\gamma}^\top \right) h \geq \frac{1}{2} \min \left\{ \underline{b}_S^2, \underline{b}_Z^2, \frac{\gamma_q^2}{m}, \frac{\gamma_\pi^2}{m} \right\} |h|^2 > 0, \quad \forall x \in \tilde{\mathcal{X}}. \quad (1.114)$$

In diesem Falle existiert gemäß dem Existenz- und Eindeigkeitsresultat aus Fleming u. Rishel [25, Abschnitt VI.6, Theorem 6.1] und Fleming u. Soner [26, Abschnitt IV.4, Theorem 4.2] eine klassische Lösung der HJB-Gleichung (1.112).

Bemerkung 1.3.4. Es sei bemerkt, dass die in Fleming u. Soner [26, Abschnitt IV.4, Theorem 4.2] gemachten Annahmen für das Existenz- und Eindeigkeitsresultat fordern, dass die Koeffizienten \tilde{a} und \tilde{b} der SDE (1.95), sowie die Gewinn- und Endauszahlungsfunktionen \tilde{F} bzw. $\tilde{\Phi}$ hinreichend glatt und beschränkt sind. Diese Funktionen sind im betrachteten Modell des Energiespeichers nur Lipschitz-stetig und deren Ableitungen können z.B. an den Grenzen des Gebietes \mathcal{X} Sprünge haben. Außerdem sind sie nur bezüglich der Variablen q und π beschränkt, allerdings nicht bezüglich s und z , da deren Dynamik durch die Diffusionsprozesse beschrieben wird. Eine mögliche Variante, dieses Problem zu überwinden, besteht in der Betrachtung einer Folge von Optimalsteuerungsproblemen, bei denen die unstetigen Funktionen gemäß Fleming u. Soner [26, Anhang C] durch geglättete Funktionen approximiert werden. Die unbeschränkten Funktionen lassen sich mittels beschränkter Funktionen approximieren, wie es z.B. in Harrison u. Zeevi [35, Anhang B] vorgeschlagen wird.

Analog zum Fall des unregularisierten Zustandsprozesses $(X_t^u)_{t \in [0, T]}$, der der SDE (1.64) folgt, lässt sich die folgende Proposition zur Wohldefiniertheit der Zielfunktion beweisen, wenn die Dynamik des Kontrollsystems durch den regularisierten, der SDE (1.95) genügenden Zustandsprozess $({}^m X_t^u)_{t \in [0, T]}$ beschrieben wird.

Proposition 1.3.5. Sei $({}^m S_t)_{t \in [0, T]}$ ein regularisierter Preisprozesses (1.60) mit den Koeffizienten

$$\tilde{a}_S(s, \pi) = \left(\left(1 - \frac{\text{dist}(\pi, \mathcal{P})}{\varepsilon_\pi} \right) \vee 0 \right) (\bar{m}(\pi) - \bar{\kappa}(\pi)s) \quad \text{und} \quad b_S(s) = \sigma. \quad (1.115)$$

Dann ist folgende Integrabilitätsbedingung

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T e^{-\rho(r-t)} |\tilde{F}({}^m X_r^u, u_r)| dr + e^{-\rho(T-t)} |\tilde{\Phi}({}^m X_T^u)| \mid {}^m X_t^u = x \right] < \infty$$

für einen gegebenen Anfangswert $x := (q, s, z, \pi) \in \tilde{\mathcal{X}}$, $t \in [0, T]$ und beliebige zulässige Steuerung $u \in \mathcal{U}_M(t, x)$ erfüllt und es gilt $|J^m(t, x; u)| < \infty$.

Beweis. In Lemma 1.3.3 wurde die lineare Wachstumsbedingung (1.106) für die regularisierten Gewinn- und Endauszahlungsfunktionen \tilde{F} bzw. $\tilde{\Phi}$ erhalten. Da beide Funktionen nur bezüglich des Preises unbeschränkt sind, lassen sich die linearen Wachstumsbedingungen für die Gewinnfunktion \tilde{F} und die Endauszahlungsfunktion $\tilde{\Phi}$ wie folgt umschreiben:

$$|\tilde{F}(q, s, y)| \leq \bar{C}_G(1 + |s|), \quad |\tilde{\Phi}(q, s)| \leq \bar{C}_G(1 + |s|), \quad \bar{C}_G > 0.$$

Sei nun $u \in \mathcal{U}_M(t, x)$ eine beliebige zulässige Steuerung. Dann ergibt sich für die Zielfunktion $J^m(t, x; u)$ aus (1.109) folgende Abschätzung wie in Proposition 1.2.2:

$$\begin{aligned} |J^m(t, x; u)| &= \left| \mathbb{E} \left[\int_t^T e^{-\rho(r-t)} \tilde{F}({}^m Q_r^u, {}^m S_r, u_r) dr + e^{-\rho(T-t)} \tilde{\Phi}({}^m Q_T^u, {}^m S_T) \mid {}^m X_t^u = x \right] \right| \\ &\leq \bar{C}_G \int_t^T e^{-\rho(r-t)} \left(1 + \mathbb{E} \left[|{}^m S_r^{t,s}| \right] \right) dr + \bar{C}_G e^{-\rho(T-t)} \left(1 + \mathbb{E} \left[|{}^m S_T^{t,s}| \right] \right). \end{aligned} \quad (1.116)$$

Die im obigen Ausdruck auftauchenden ersten absoluten Momente $\mathbb{E} \left[|{}^m S_r^{t,s}| \right]$ und $\mathbb{E} \left[|{}^m S_T^{t,s}| \right]$ werden nun weiter abgeschätzt. Hierfür wird der Driftkoeffizient in der SDE für ${}^m S$ in der Form $\tilde{a}_S({}^m S_t, {}^m \Pi_t) = A_t - D_t {}^m S_t$ mit A_t und D_t aus (1.98) geschrieben. Wegen der Konstruktion (1.98) ist der Prozess D nichtnegativ. Somit gilt nach Lemma 1.2.4 die Abschätzung (1.72) für das zweite Moment des regularisierten Preisprozesses. Die Anwendung der Lyapunov-Ungleichung liefert

$$\mathbb{E} \left[|{}^m S_r^{t,s}| \right] \leq \tilde{C}(1 + |s|)(1 + r), \quad \forall r \geq t, \quad \tilde{C} > 0.$$

Mittels dieser Abschätzung wird die Beziehung (1.116) wie folgt umgeschrieben:

$$\begin{aligned} |J^m(t, x; u)| &\leq \bar{C}_G \int_t^T e^{-\rho(r-t)} \left(1 + \tilde{C}(1 + |s|)(1 + r) \right) dr \\ &\quad + \bar{C}_G e^{-\rho(T-t)} \left(1 + \tilde{C}(1 + |s|)(1 + T) \right) \\ &\leq C_1(1 + |x|) + \bar{C}_G \tilde{C}(1 + |x|) \int_t^\infty e^{-\rho(r-t)} r dr \\ &= C_1(1 + |x|) + \bar{C}_G \tilde{C}(1 + |x|) \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{t}{\rho} \right) \leq C_2(1 + |x|), \quad C_2 > 0. \end{aligned} \quad (1.117)$$

Somit gilt $|J^m(t, x; u)| < \infty$ für alle $(t, x) \in [0, T] \times \tilde{\mathcal{X}}$ und $u \in \mathcal{U}_M(t, x)$. \square

Man kann ebenfalls zeigen, dass die Wertfunktion $V^m(t, x)$ der linearen Wachstumsbedingung bezüglich ${}^m X^u$ genügt.

Theorem 1.3.6. Sei $({}^m S_t)_{t \in [0, T]}$ ein regularisierter Preisprozesses (1.60) mit den Koeffizienten (1.115). Die Wertfunktion $V^m(t, x)$ des regularisierten stochastischen Optimalsteuerungsproblems mit voller Information (1.110) ist stetig in $(t, x) \in [0, T] \times \tilde{\mathcal{X}}$, $V^m(T, x) = \tilde{\Phi}(x)$. Es gibt eine positive Konstante $K > 0$, sodass für alle $(t, x) \in [0, T] \times \tilde{\mathcal{X}}$ die Wertfunktion $V^m(t, x)$ der linearen Wachstumsbedingung genügt:

$$|V^m(t, x)| \leq K(1 + |x|). \quad (1.118)$$

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis des Theorems 1.2.5. \square

Das zur Bestimmung des Kandidaten für optimale Strategie zu lösende punktweise Optimierungsproblem in der regularisierten HJB-Gleichung (1.112) ist

$$\sup_{y \in U_M} \tilde{H}\left(y; x, \frac{\partial}{\partial q} V^m(t, x)\right) \quad \text{mit} \quad \tilde{H}(y) = \tilde{H}(y; x, \xi) = \tilde{\psi}(x, y)\xi + \tilde{F}(x, y), \quad (1.119)$$

$$\forall (t, x) \in [0, T] \times \tilde{\mathcal{X}}.$$

Die Menge U_M ist ein abgeschlossenes Intervall $[\underline{M}_u, \overline{M}_u]$ und somit existiert stets ein Maximierer für \tilde{H} . Er ist aber nicht unbedingt eindeutig, da \tilde{H} wegen der für die Werte der Steuerung $y \in U_M$ verwendeten Abschnidefunktion (1.94) auf den Intervallen $[\underline{M}_u, \tilde{u}(q)]$ und $[\tilde{u}(q), \overline{M}_u]$ konstant ist. Andererseits gilt $\tilde{H}(y) = H(y)$ für alle $x \in \mathcal{X}$ und $y \in U(q)$. Somit kann man als Maximierer der Funktion \tilde{H} die messbare Borelfunktion $y^* = w_M^*(t, x)$ verwenden, welche sich für $x \in \mathcal{X}$ nach der für $w^*(t, x)$ erhaltenen Regel (1.92) durch die Ersetzung von $\frac{\partial}{\partial q} V$ durch $\frac{\partial}{\partial q} V^m$ ergibt. Für $q \notin \mathcal{Q}_\varepsilon$ gilt $\tilde{H}(y) = H(\mathfrak{T}(y, q)) \equiv 0$ und $w_M^*(t, x) = 0$. Wenn einer der zwei Randwerte $\tilde{u}(q)$ und $\tilde{\bar{u}}(q)$ der Menge $\tilde{U}(q)$ ein Maximierer ist, so ist wegen der Konstanz der Funktion \tilde{H} auf $[\underline{M}_u, \tilde{u}(q)]$ und $[\tilde{\bar{u}}(q), \overline{M}_u]$ jeder in diesen zwei Intervallen liegende Wert y ein Maximierer. In diesem Falle lässt sich $w_M^*(t, x)$ gleich dem entsprechenden Randwert der Menge $\tilde{U}(q)$ setzen, da die anderen Werte der Steuerung aus praktischer Sicht keine physikalische Bedeutung besitzen. Somit kann die optimale Steuerung für das regularisierte Problem (1.110) als ${}^m u_t^* = w_M^*(t, {}^m X_t^{m u^*})$ gewählt werden.

Um zu überprüfen, ob die klassische Lösung der HJB-Gleichung (1.112) wirklich eine Wertfunktion $V^m(t, x)$ und der Kandidat ${}^m u_t^* = w_M^*(t, {}^m X_t^{m u^*})$ eine optimale Steuerung des stochastischen Optimalsteuerungsproblems (1.110) sind bzw. unter welchen Bedingungen dies gilt, kann man Verifikationstheoreme wie in Fleming u. Soner [26, Abschnitt IV.3] und Pham [53, Abschnitt 3.5] anwenden, die die *hinreichenden Optimalitätsbedingungen* enthalten.

Theorem 1.3.7 (Verifikationstheorem ($T < \infty$)). Sei V^m die Wertfunktion des regularisierten Optimalsteuerungsproblems (1.110) und $H^m \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \tilde{\mathcal{X}})$ eine Funktion, die der linearen Wachstumsbedingung (1.118) genügt.

1. Genüge $H^m : [0, T] \times \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathbb{R}$ folgenden Bedingungen:

$$(a) \quad H^m(T, x) \geq \tilde{\Phi}(x), \quad \forall x \in \tilde{\mathcal{X}};$$

(b) für alle $(t, x) \in [0, T) \times \tilde{\mathcal{X}}$ und alle ${}^m u \in \mathcal{U}_M(t, x)$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} H^m(t, x) + ({}^m \mathcal{L} - \rho) H^m(t, x) + \sup_{y \in \mathcal{U}_M} \left\{ \tilde{\psi}(x, y) \frac{\partial}{\partial q} H^m(t, x) + \tilde{F}(x, y) \right\} \leq 0$$

mit dem in (1.111) definierten Operator ${}^m \mathcal{L}$.

Dann gilt für alle $(t, x) \in [0, T] \times \tilde{\mathcal{X}}$

$$H^m(t, x) \geq V^m(t, x).$$

2. Sei weiterhin $H^m(T, x) = \tilde{\Phi}(x)$, $\forall x \in \tilde{\mathcal{X}}$, und $w_M^* : [0, T] \times \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{U}_M$ eine messbare Funktion, sodass

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} H^m(t, x) + ({}^m \mathcal{L} - \rho) H^m(t, x) + \sup_{y \in \mathcal{U}_M} \left\{ \tilde{\psi}(x, y) \frac{\partial}{\partial q} H^m(t, x) + \tilde{F}(x, y) \right\} = \\ & \frac{\partial}{\partial t} H^m(t, x) + ({}^m \mathcal{L} - \rho) H^m(t, x) + \tilde{\psi}(x, w_M^*(t, x)) \frac{\partial}{\partial q} H^m(t, x) + \tilde{F}(x, w_M^*(t, x)) = 0 \end{aligned}$$

und die SDE (1.95) eine eindeutige Lösung $({}^m X_r^*)_{r \in [t, T]}$ mit ${}^m X_r^* = {}^m X_r^{(t, x, {}^m u^*)}$ und vorgegebenem Startwert ${}^m X_t^* = x$ hat, wobei der Steuerungsprozess durch $\left(w_M^*(r, {}^m X_r^*) \right)_{r \in [t, T]}$ bestimmt wird. Dann gilt $H^m(t, x) = V^m(t, x)$ für alle $(t, x) \in [0, T] \times \tilde{\mathcal{X}}$ und ${}^m u_t^* = w_M^*(t, {}^m X_t^*)$ ist eine optimale Markov-Steuerung des regularisierten Problems.

Beweis. Beweis siehe z.B. Theorem 3.5 in Benth, Lempa u. Nilssen [7] und Theorem 3.5.2 in Pham [53]. Die Beweisidee ist die Folgende. Man wendet die Itô-Formel auf die Funktion $e^{-\rho t} H^m(t, x)$ an. Zusammen mit der linearen Wachstumsbedingung (1.118) für $H^m(t, x)$ und dem Theorem von der dominierten Konvergenz ergibt sich die Behauptung des Theorems. \square

Für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von SDE (1.96) siehe Leobacher, Szölgényi u. Thonhauser [48].

1.3.2 Unendlicher Zeithorizont

Analog zu (1.109) und (1.110) definiert man für $T = \infty$ die regularisierte Zielfunktion $J^m : \tilde{\mathcal{X}} \times \mathcal{U}_M \rightarrow \mathbb{R}$

$$J^m(x; u) = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\rho t} \tilde{F}({}^m X_t^u, u_t) dt \mid {}^m X_0^u = x \right], \quad x \in \tilde{\mathcal{X}}, \quad u \in \mathcal{U}_M(x), \quad (1.120)$$

und die regularisierte Wertfunktion $V^m : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathbb{R}$

$$V^m(x) = \sup_{u \in \mathcal{U}_M(x)} J^m(x; u), \quad x \in \tilde{\mathcal{X}}. \quad (1.121)$$

Mit $\mathcal{U}_M(x)$ wird für alle $x \in \tilde{\mathcal{X}}$ wie in (1.102) die Menge der zulässigen Markov-Steuerungsprozesse

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_M(x) = \left\{ u = (u_t)_{t \in [0, \infty)} \mid u \text{ ist } \mathbb{H} - \text{progressiv messbar,} \right. \\ \left. u_t = w_M({}^m X_t^u) \text{ für alle } t \in [0, \infty) \text{ und } w_M(x) \in U_M, \forall x \in \tilde{\mathcal{X}}, \right. \\ \left. \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\rho t} |\tilde{F}({}^m X_t^u, u_t)| dt \mid {}^m X_0^u = x \right] < \infty \right\} \end{aligned} \quad (1.122)$$

bezeichnet, wobei $w_M : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow U_M$ eine Borelfunktion ist.

Schließlich lässt sich analog zum Fall $T < \infty$ die HJB-Gleichung für das regularisierte stochastische Optimalsteuerungsproblem (1.121), dessen regularisierte Zustandsprozess $({}^m X_t^u)_{t \in [0, \infty)}$ der SDE (1.95) genügt, angeben:

$$({}^m \mathcal{L} - \rho)V^m(x) + \sup_{y \in U_M} \left\{ \tilde{\psi}(x, y) \frac{\partial}{\partial q} V^m(x) + \tilde{F}(x, y) \right\} = 0, \quad \forall x \in \tilde{\mathcal{X}}, \quad (1.123)$$

mit dem infinitesimalen Generator des Zustandsprozesses $({}^m X_t^u)_{t \in [0, \infty)}$

$$\tilde{\psi}(x, y) \frac{\partial}{\partial q} + {}^m \mathcal{L}, \quad x \in \tilde{\mathcal{X}},$$

und dem Differentialoperator 2. Ordnung ${}^m \mathcal{L}$ aus (1.111).

Wegen der Elliptizität von ${}^m \mathcal{L}$ (siehe Bedingung (1.114)) hat die regularisierte HJB-Gleichung (1.123) eine klassische Lösung.

Analog zu Proposition 1.2.7 gilt:

Proposition 1.3.8. *Sei $({}^m S_t)_{t \in [0, \infty)}$ ein regularisierter Preisprozesses (1.60) mit den Koeffizienten (1.115). Dann ist folgende Integrabilitätsbedingung*

$$\mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\rho t} |\tilde{F}({}^m X_t^u, u_t)| dt \mid {}^m X_0^u = x \right] < \infty$$

für einen gegebenen Anfangswert $x := (q, s, z, \pi) \in \tilde{\mathcal{X}}$ und beliebige zulässige Steuerung $u \in \mathcal{U}_M(x)$ erfüllt und es gilt $|J^m(x; u)| < \infty$.

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis der Proposition 1.3.5 und wird unter Berücksichtigung der Beziehung (1.117) auf folgende Abschätzung zurückgeführt:

$$\begin{aligned} |J^m(x; u)| &\leq C_1(1 + |x|) + \bar{C}_G \tilde{C}(1 + |x|) \int_0^\infty e^{-\rho t} t dt = C_1(1 + |x|) + \frac{\bar{C}_G \tilde{C}}{\rho^2} (1 + |x|) \\ &\leq C_2(1 + |x|) < \infty, \quad C_2 > 0, \quad \forall x \in \tilde{\mathcal{X}}, \quad u \in \mathcal{U}_M(x), \end{aligned}$$

wobei $C_2 > 0$ eine von t unabhängige positive Konstante ist. \square

Somit ist bewiesen, dass die in (1.120) eingeführte Zielfunktion wohl definiert ist. Nun kann man auch zeigen, dass die Wertfunktion $V^m(x)$ der linearen Wachstumsbedingung bezüglich des Zustandsprozesses ${}^mX^u$ genügt.

Theorem 1.3.9. *Sei $({}^mS_t)_{t \in [0, \infty)}$ ein regularisierter Preisprozess (1.60) mit den Koeffizienten (1.115). Die Wertfunktion $V^m(x)$ des regularisierten stochastischen Optimalsteuerungsproblems mit voller Information (1.121) ist stetig in $x \in \tilde{\mathcal{X}}$. Es gibt eine positive Konstante $K > 0$, sodass für alle $x \in \tilde{\mathcal{X}}$ die Wertfunktion $V^m(x)$ der linearen Wachstumsbedingung genügt:*

$$|V^m(x)| \leq K(1 + |x|). \quad (1.124)$$

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis des Theorems 1.3.6. \square

Zur Bestimmung des Kandidaten für die optimale Strategie wird das punktweise Optimierungsproblem in (1.123)

$$\sup_{y \in U_M} \left\{ \tilde{\psi}(x, y) \frac{\partial}{\partial q} V^m(x) + \tilde{F}(x, y) \right\}, \quad x \in \tilde{\mathcal{X}}. \quad (1.125)$$

gelöst und für die optimale Strategie $w_M^*(x)$, $x \in \tilde{\mathcal{X}}$, wird wieder die Entscheidungsregel (1.92) herangezogen. Somit ist ${}^mu_t^* = w_M^*({}^mX_t^{m u^*})$, $x \in \tilde{\mathcal{X}}$, die optimale Markov-Steuerung für das regularisierte stochastische Optimalsteuerungsproblem (1.121) mit unendlichem Zeithorizont.

Nun bleibt zu zeigen, dass die Lösung $H^m \in \mathcal{C}^2(\tilde{\mathcal{X}})$ der HJB-Gleichung (1.123) die Wertfunktion des regularisierten Optimalsteuerungsproblems (1.121) im Falle unendlichen Zeithorizontes ist.

Theorem 1.3.10 (Verifikationstheorem ($T = \infty$)). *Sei V^m die Wertfunktion des regularisierten Optimalsteuerungsproblems (1.121) und $H^m \in \mathcal{C}^2(\tilde{\mathcal{X}})$ eine Funktion, die der linearen Wachstumsbedingung (1.124) genügt.*

1. Sei

$$(a) \quad ({}^m\mathcal{L} - \rho)H^m(x) + \sup_{y \in U_M} \left\{ \tilde{\psi}(x, y) \frac{\partial}{\partial q} H^m(x) + \tilde{F}(x, y) \right\} \leq 0, \quad \forall x \in \tilde{\mathcal{X}},$$

mit dem in (1.111) definierten Operator ${}^m\mathcal{L}$;

$$(b) \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} \mathbb{E}[H^m({}^mX_t)] \geq 0, \quad \forall x \in \tilde{\mathcal{X}}, \quad \forall {}^mu \in \mathcal{U}_M(x).$$

Dann gilt für alle $x \in \tilde{\mathcal{X}}$:

$$H^m(x) \geq V^m(x).$$

2. Weiterhin existiere für alle $x \in \tilde{\mathcal{X}}$ eine messbare Funktion $w_M^* : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow U_M$, $\forall x \in \tilde{\mathcal{X}}$, sodass

$$\begin{aligned} & ({}^m\mathcal{L} - \rho)H^m(x) + \sup_{y \in U_M} \left\{ \tilde{\psi}(x, y) \frac{\partial}{\partial q} H^m(x) + \tilde{F}(x, y) \right\} = \\ & ({}^m\mathcal{L} - \rho)H^m(x) + \tilde{\psi}(x, w_M^*(x)) \frac{\partial}{\partial q} H^m(x) + \tilde{F}(x, w_M^*(x)) = 0 \end{aligned}$$

und die SDE (1.95) eine eindeutige Lösung $({}^m X_t^*)_{t \in [0, \infty)}$ mit ${}^m X_t^* = {}^m X_t^{(0, x, {}^m u^*)}$ und vorgegebenem Startwert ${}^m X_0^* = x$ hat, wobei der Steuerungsprozess durch $(w_M^*({}^m X_t^*))_{t \in [0, \infty)}$ bestimmt wird, und es gelte die Bedingung

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} \mathbb{E}[H^m({}^m X_t)] \leq 0, \quad \forall x \in \tilde{\mathcal{X}}, \quad \forall {}^m u \in \mathcal{U}_M(x).$$

Dann gilt $H^m(x) = V^m(x)$ für alle $x \in \tilde{\mathcal{X}}$ und ${}^m u_t^* = w_M^*({}^m X_t^*)$ ist eine optimale Markov-Steuerung des regularisierten Problems.

Beweis. Beweis siehe Theorem 3.5.3 in Pham [53]. Die Beweisidee ist analog zur Beweisidee des Verifikationstheorems 1.3.7. Man wendet die Itô-Formel auf die Funktion $e^{-\rho t} H^m(x)$ an und verwendet in Hinblick auf die lineare Wachstumsbedingung (1.124) für $H^m(x)$ und die Integrabilitätsbedingung (1.87) das Theorem von der dominierten Konvergenz. \square

Die Fragen der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von SDE (1.96) werden in Shardin u. Szölgényi [64] behandelt.

1.3.3 Asymptotische Eigenschaften

Dieser Abschnitt ist dem Vergleich des regularisierten stochastischen Optimalsteuerungsproblems mit seiner ursprünglichen (unregularisierten) Variante sowohl für den Fall des endlichen als auch des unendlichen Zeithorizontes gewidmet. Ziel ist es, die Konvergenz des regularisierten Zustandsprozesses ${}^m X^u$, der Zielfunktion J^m und der Wertfunktion V^m gegen ihre „Originalversionen“ X^u , J bzw. V für $m \rightarrow \infty$ zu untersuchen.

Endlicher Zeithorizont

Sei $({}^0 X_t^u)_{t \in [0, T]}$ der Zustandsprozess des unregularisierten stochastischen Optimalsteuerungsproblems, welcher sich für eine Steuerung $u \in \mathcal{U}_M(t, x)$, $(t, x) \in [0, T] \times \tilde{\mathcal{X}}$, ergibt. Dann folgt die Dynamik des Zustandes ${}^0 X^u$ aus der SDE (1.95) jedoch ohne Berücksichtigung des Störtermes $\frac{1}{\sqrt{m}} \gamma d\tilde{B}_t$:

$$d{}^0 X_t^u = \tilde{a}({}^0 X_t^u, u_t) dt + \tilde{b}({}^0 X_t^u) dW_t, \quad {}^0 X_0^u = x_0, \quad u \in \mathcal{U}_M(0, x_0). \quad (1.126)$$

Ist der Preisprozess ein OU-Prozess mit dem Markov-modulierten Driftkoeffizienten, dann gilt folgende Abschätzung für das zweite Moment des Zustandsprozesses ${}^0 X^u$.

Lemma 1.3.11. *Der im Zustandsprozess $({}^0 X_t^u)_{t \in [0, T]}$ enthaltene Preisprozess $({}^0 S_t)_{t \in [0, T]}$ besitzt die in (1.60) und (1.115) gegebene Gestalt. Dann gilt für das zweite Moment von $({}^0 X_t^u)_{t \in [0, T]}$:*

$$\mathbb{E} \left[|{}^0 X_t^{r, x}|^2 \right] \leq K(1 + |x|^2), \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \tilde{\mathcal{X}}, \quad K > 0. \quad (1.127)$$

Beweis. Da der Störterm $\frac{1}{\sqrt{m}}\gamma d\tilde{B}_t$ in die SDE (1.126) nicht eingeht, sind die Prozesse ${}^0Q^u$ und ${}^0\Pi$ beschränkt. Der Preisprozess 0S mit dem regularisierten Driftkoeffizienten \tilde{a}_S stimmt mit dem Prozess S überein, sodass der Prozess $D_t = \bar{\kappa}({}^0\Pi_t)$ in der Darstellung (1.69) wegen der positiven Steifigkeiten $\kappa_i, i = 1, \dots, d$, des OU-Prozesses (1.60) ebenfalls positiv ist und gemäß dem Lemma 1.2.4 die Abschätzung (1.73) für das zweite Moment gilt:

$$\mathbb{E}\left[({}^0S_t^{r,s})^2\right] = \mathbb{E}\left[(S_t^{r,s})^2\right] \leq C(1+s^2), \quad \forall t \geq r, \quad C > 0.$$

Für den Zufluss Z ist die Bedingung (1.18) erfüllt. Somit ergibt sich für 0X die Abschätzung (1.127) für das zweite Moment. \square

Weiter betrachten wir analog zu (1.109) und (1.110) die zum Zustand ${}^0X^u$ gehörende Zielfunktion

$$J^0(t, x; u) = \mathbb{E}\left[\int_t^T e^{-\rho(r-t)} \tilde{F}({}^0X_r^u, u_r) dr + e^{-\rho(T-t)} \tilde{\Phi}({}^0X_T^u) \mid {}^0X_t^u = x\right], \quad (1.128)$$

$$u \in \mathcal{U}_M(t, x),$$

und die Wertfunktion

$$V^0(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{U}_M(t, x)} J^0(t, x; u), \quad (t, x) \in [0, T] \times \tilde{\mathcal{X}}. \quad (1.129)$$

Im Gegensatz zum ursprünglichen Optimalsteuerungsproblem (1.68) mit dem unregularisierten Zustand ist das neue Problem (1.129) für alle Steuerungsprozesse $u \in \mathcal{U}_M(t, x)$, $(t, x) \in [0, T] \times \tilde{\mathcal{X}}$, definiert. Insbesondere ist seine Menge der zulässigen Steuerungswerte \mathcal{U}_M vom aktuellen Zustand ${}^0X_t^u$ unabhängig. Andererseits kann man für alle den Zustandsbeschränkungen genügenden Steuerungen $u \in \mathcal{U}(t, x)$ (die auch in $\mathcal{U}_M(t, x)$ liegen) feststellen, dass die SDE (1.64) für X^u im Originalproblem und die neue SDE (1.126) für ${}^0X^u$ jeweils ausgehend vom gleichen Anfangswert $x \in \mathcal{X}$ den gleichen Zustandsprozess $X^u = {}^0X^u$ definieren. Außerdem stimmen die Zielfunktionen J^0 und J für alle $u \in \mathcal{U}(t, x)$ und $(t, x) \in [0, T] \times \mathcal{X}$ wegen der durchgeführten Regularisierung für \tilde{a} , \tilde{b} , \tilde{F} und $\tilde{\Phi}$ miteinander überein, d.h. $J^0(t, x; u) = J(t, x; u)$.

Sei $u \in \mathcal{U}_M(t, x)$. Dann wird für jedes Paar $(u, {}^0Q^u)$ der Abschneideoperator $\mathfrak{G} : \mathcal{U}_M \rightarrow \mathcal{U}$ als

$$u \mapsto \check{u} = \mathfrak{G}(u) = \mathfrak{G}(u, {}^0Q^u) \text{ mit } \check{u}_t = \mathfrak{T}(u_t, {}^0Q_t^u), \quad t \in [0, T], \quad (1.130)$$

definiert. Dabei ist \mathfrak{T} die in (1.94) eingeführte Abschneidefunktion und es gilt $\mathfrak{G}(u) \in \mathcal{U}(t, x)$ wegen $\mathfrak{T}(y, q) \in \mathcal{U}(q)$, $\forall q \in \mathcal{Q}$, d.h. $\mathfrak{G}(u)$ genügt den Zustandsbeschränkungen. Wenn der Steuerungsprozess $u \in \mathcal{U}_M(t, x)$ mit Hilfe einer Borelfunktion $w_M = w_M(t, x)$ definiert wird, so wird $\mathfrak{G}(u)$ mittels $w(t, x) = \mathfrak{T}(w_M(t, x), q)$ definiert. Darüber hinaus erzeugen die Steuerungsprozesse $u \in \mathcal{U}_M(t, x)$ und $\mathfrak{G}(u) \in \mathcal{U}(t, x)$ den gleichen Zustandsprozess ${}^0X^u = {}^0X^{\mathfrak{G}(u)}$, sodass für alle $(t, x) \in [0, T] \times \mathcal{X}$

$$J^0(t, x; u) = J^0(t, x; \mathfrak{G}(u)) = J(t, x; \mathfrak{G}(u)), \quad u \in \mathcal{U}_M(t, x), \quad (1.131)$$

gilt. Schließlich sind die Wertfunktionen im unregularisierten Fall (1.68) und (1.129) für alle $(t, x) \in [0, T] \times \mathcal{X}$ gleich, u.z.

$$V(t, x) = V^0(t, x), \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathcal{X}. \quad (1.132)$$

Nach diesen Vorbereitungen kann man nun die Untersuchung der asymptotischen Eigenschaften für den Fall $m \rightarrow \infty$ beginnen. Zuerst wird die gleichmäßige L_2 -Konvergenz von ${}^m X^u$ gegen ${}^0 X^u$ für $m \rightarrow \infty$ gezeigt.

Lemma 1.3.12 (Gleichmäßige L_2 -Konvergenz). *Sei ${}^m X_t^u = {}^0 X_t^u = x \in \mathcal{X}$ und $u \in \mathcal{U}_M(t, x)$ eine zulässige Steuerung. Dann gilt für $m \rightarrow \infty$*

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \leq r \leq T} \left| {}^m X_r^{(t,x,u)} - {}^0 X_r^{(t,x,u)} \right|^2 \right] \rightarrow 0$$

gleichmäßig in $u \in \mathcal{U}_M(t, x)$, wobei ${}^m X_r^{(t,x,u)}$ und ${}^0 X_r^{(t,x,u)}$ die Lösungen der regularisierten SDE (1.95) bzw. der nichtregularisierten SDE (1.126) sind.

Beweis. Zur Vereinfachung der Notation entfallen im Weiteren die Superskripte (t, x, u) und die Lösungen der SDE (1.95) und (1.126) werden mit ${}^m X^u$ bzw. ${}^0 X^u$ bezeichnet. O.B.d.A. sei $t = 0$ und $x = x_0$. Dann gilt für die Lösungen ${}^m X_t^u$ und ${}^0 X_t^u$:

$$\begin{aligned} {}^m X_t^u &= x_0 + \int_0^t \tilde{a}({}^m X_s^u, u_s) ds + \int_0^t \tilde{b}({}^m X_s^u) dW_s + \frac{1}{\sqrt{m}} \gamma \tilde{B}_t, \\ {}^0 X_t^u &= x_0 + \int_0^t \tilde{a}({}^0 X_s^u, u_s) ds + \int_0^t \tilde{b}({}^0 X_s^u) dW_s. \end{aligned}$$

Weiter ist ${}^m X_t^u - {}^0 X_t^u = L_t^m + R_t^m$, wobei

$$\begin{aligned} L_t^m &= \int_0^t \left(\tilde{a}({}^m X_s^u, u_s) - \tilde{a}({}^0 X_s^u, u_s) \right) ds, \\ R_t^m &= \int_0^t \left(\tilde{b}({}^m X_s^u) - \tilde{b}({}^0 X_s^u) \right) dW_s + \frac{1}{\sqrt{m}} \gamma \tilde{B}_t. \end{aligned}$$

Sei $G_t^m = \mathbb{E} \left[\sup_{s \leq t} |{}^m X_s^u - {}^0 X_s^u|^2 \right]$. Dann gilt folgende Abschätzung:

$$G_t^m = \mathbb{E} \left[\sup_{s \leq t} |L_s^m + R_s^m|^2 \right] \leq 2\mathbb{E} \left[\sup_{s \leq t} |L_s^m|^2 \right] + 2\mathbb{E} \left[\sup_{s \leq t} |R_s^m|^2 \right]. \quad (1.133)$$

Nun formt man den ersten Term in (1.133) mittels der Cauchy-Schwarz-Ungleichung um:

$$\begin{aligned} \sup_{s \leq t} |L_s^m|^2 &= \sup_{s \leq t} \left| \int_0^s \left(\tilde{a}({}^m X_r^u, u_r) - \tilde{a}({}^0 X_r^u, u_r) \right) dr \right|^2 \\ &\leq \sup_{s \leq t} s \cdot \int_0^s \left| \tilde{a}({}^m X_r^u, u_r) - \tilde{a}({}^0 X_r^u, u_r) \right|^2 dr. \end{aligned}$$

Anwendung der Lipschitz-Bedingung (1.104) für die Koeffizienten der SDE (1.95) führt zu

$$\sup_{s \leq t} |L_s^m|^2 \leq t \cdot \int_0^t C_L^2 |{}^m X_r^u - {}^0 X_r^u|^2 dr \leq t \cdot \int_0^t C_L^2 \sup_{l \leq r} |{}^m X_l^u - {}^0 X_l^u|^2 dr$$

für jede fixierte Steuerung $u \in \mathcal{U}_M(0, x_0)$ und eine positive, von u unabhängige Konstante $C_L > 0$.

Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{s \leq t} |L_s^m|^2 \right] &\leq t \cdot C_L^2 \int_0^t \mathbb{E} \left[\sup_{l \leq r} |{}^m X_l^u - {}^0 X_l^u|^2 \right] dr \\ &\leq C_1 \int_0^t G_r^m dr, \quad C_1 = t C_L^2 < \infty. \end{aligned} \quad (1.134)$$

Für den zweiten nichtnegativen Term in (1.133) wird die Doob'sche Martingalungleichung angewendet:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{s \leq t} |R_s^m|^2 \right] &\leq 4 \mathbb{E} \left[|R_t^m|^2 \right] = 4 \left(\int_0^t \mathbb{E} \left[\text{tr} \left((\tilde{b}({}^m X_s^u) - \tilde{b}({}^0 X_s^u))^\top (\tilde{b}({}^m X_s^u) - \tilde{b}({}^0 X_s^u)) \right) \right] ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{\text{tr}[\underline{\gamma}^\top \underline{\gamma}]}{m} t \right). \end{aligned}$$

Da die Koeffizienten \tilde{b} der Lipschitz-Bedingung (1.104) genügen und $\text{tr}[\underline{\gamma}^\top \underline{\gamma}] = \gamma_q^2 + (d-1)\gamma_\pi^2$, erhält man folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{s \leq t} |R_s^m|^2 \right] &\leq 4 \left(\int_0^t C_L^2 \mathbb{E} \left[|{}^m X_s^u - {}^0 X_s^u|^2 \right] ds + \frac{\gamma_q^2 + (d-1)\gamma_\pi^2}{m} t \right) \\ &\leq 4 \left(\int_0^t C_L^2 \mathbb{E} \left[\sup_{r \leq s} |{}^m X_r^u - {}^0 X_r^u|^2 \right] ds + \frac{\gamma_q^2 + (d-1)\gamma_\pi^2}{m} t \right) \quad (1.135) \\ &= C_2 \int_0^t G_s^m ds + 4 \frac{\gamma_q^2 + (d-1)\gamma_\pi^2}{m} t, \quad C_2 = 4C_L^2 < \infty. \end{aligned}$$

Nach dem Einsetzen von (1.134) und (1.135) in (1.133) kommt man zum dem folgenden Ausdruck für G_t^m :

$$G_t^m \leq C_3 \int_0^t G_s^m ds + \frac{C_4}{m} T, \quad C_3 = 2C_1 + 2C_2, \quad C_4 = 8 \left(\gamma_q^2 + (d-1)\gamma_\pi^2 \right). \quad (1.136)$$

Da G_t^m eine positive stetige Funktion und $\frac{C_4}{m}T$ eine positive Konstante sind, kann man für G_t^m das Gronwall-Lemma anwenden:

$$G_t^m \leq \frac{C_4}{m}T + C_3 \frac{C_4}{m}T \int_0^T e^{C_3(T-s)} ds = \frac{C_4}{m}T e^{C_3T}. \quad (1.137)$$

Für $m \rightarrow \infty$ gilt nun

$$G_t^m \leq \frac{C_4}{m}T e^{C_3T} \rightarrow 0.$$

□

Weil das regularisierte Problem eine klassische Lösung besitzt, ist es nun von Interesse, ob seine Wertfunktion V^m gegen die Wertfunktion V des nichtregularisierten Problems konvergiert. Zuerst prüft man diese Eigenschaft für die Zielfunktion.

Theorem 1.3.13 (Gleichmäßige Konvergenz der Zielfunktion ($T < \infty$)). *Seien $J^0(t, x; u)$ und $J^m(t, x; u)$ die Zielfunktionen für das nichtregularisierte und das regularisierte stochastische Optimalsteuerungsproblem (1.129) bzw. (1.110) und $(t, x) \in [0, T] \times \mathcal{X}$. Dann gilt für $m \rightarrow \infty$*

$$\sup_{u \in \mathcal{U}_M(t, x)} |J^m(t, x; u) - J^0(t, x; u)| \rightarrow 0$$

gleichmäßig in $u \in \mathcal{U}_M(t, x)$.

Beweis. Die Definitionen (1.128) und (1.109) für J^0 und J^m liefern folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} |J^m(t, x; u) - J^0(t, x; u)| &\leq \mathbb{E} \left[\int_t^T e^{-\rho(r-t)} \left| \tilde{F}^m(X_r^{(t,x,u)}, u_r) - \tilde{F}^0(X_r^{(t,x,u)}, u_r) \right| dr \right] \\ &\quad + e^{-\rho(T-t)} \mathbb{E} \left[\left| \tilde{\Phi}^m(X_T^{(t,x,u)}) - \tilde{\Phi}^0(X_T^{(t,x,u)}) \right| \right]. \end{aligned}$$

Im Weiteren wird der Einfachheit halber die Notation ${}^m X^u = {}^m X^{(t,x,u)}$ und ${}^0 X^u = {}^0 X^{(t,x,u)}$ verwendet.

Da die Funktionen \tilde{F} und $\tilde{\Phi}$ der Lipschitz-Bedingung (1.107) für alle $x_1, x_2 \in \tilde{\mathcal{X}}$ und $y \in \mathcal{U}_M$ genügen, kann man die obige Abschätzung unter Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung noch weiter umschreiben:

$$\begin{aligned} &\sup_{u \in \mathcal{U}_M(t, x)} |J^m(t, x; u) - J^0(t, x; u)| \\ &\leq \overline{C}_L \mathbb{E} \left[\int_t^T (1 + |{}^m S_r|) \left| {}^m X_r^u - {}^0 X_r^u \right| dr \right] + \overline{C}_L \mathbb{E} \left[\left| {}^m X_T^u - {}^0 X_T^u \right| \right] \\ &\leq \overline{C}_L \int_t^T \left(\mathbb{E} \left[(1 + |{}^m S_r|)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E} \left[\left| {}^m X_r^u - {}^0 X_r^u \right|^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} dr \\ &\quad + \overline{C}_L \left(\mathbb{E} \left[\left| {}^m X_T^u - {}^0 X_T^u \right|^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
 & \sup_{u \in \mathcal{U}_M(t,x)} |J^m(t, x; u) - J^0(t, x; u)| \\
 & \leq \sqrt{3} \overline{C}_L \int_t^T \left(1 + (\mathbb{E}[(^m S_r)^2])^{\frac{1}{2}}\right) \left(\mathbb{E}\left[\left|^m X_r^u - {}^0 X_r^u\right|^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} dr \\
 & \quad + \overline{C}_L \left(\mathbb{E}\left[\left|^m X_T^u - {}^0 X_T^u\right|^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} \\
 & \leq \overline{C} T \left(\mathbb{E}\left[\sup_{t \leq r \leq T} \left|^m X_r^u - {}^0 X_r^u\right|^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} + \overline{C}_L \left(\mathbb{E}\left[\sup_{t \leq r \leq T} \left|^m X_r^u - {}^0 X_r^u\right|^2\right]\right)^{\frac{1}{2}} \\
 & = C \left(\mathbb{E}\left[\sup_{t \leq r \leq T} \left|^m X_r^u - {}^0 X_r^u\right|^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

mit $C = \overline{C} T + \overline{C}_L$, $\overline{C} = \sqrt{3} \overline{C}_L (1 + \sqrt{\overline{C}_s})$.

Bei der Herleitung der obigen Ungleichung wird das Lemma 1.2.4 und die Abschätzung (1.72), d.h.

$$\mathbb{E}\left[(^m S_r)^2\right] \leq C(1 + s^2)(1 + r^2) \leq \overline{C}_s,$$

für den Fall endlichen Zeithorizontes verwendet, die für alle $r \in [t, T]$ und eine positive konstante $\overline{C}_s > 0$ gilt.

Mittels Anwendung von Lemma 1.3.12 für $m \rightarrow \infty$ geht der Ausdruck

$$\left(\mathbb{E}\left[\sup_{t \leq r \leq T} \left|^m X_r^{(t,x,u)} - {}^0 X_r^{(t,x,u)}\right|^2\right]\right)^{\frac{1}{2}}$$

gegen Null. Weil die obigen Überlegungen für alle $u \in \mathcal{U}_M(t, x)$ gelten, ist die gleichmäßige Konvergenz der Zielfunktion bewiesen. \square

Folgerung 1.3.14 (Punktweise Konvergenz der Wertfunktion ($T < \infty$)). Seien $V(t, x)$ und $V^m(t, x)$ die Wertfunktionen für das nichtregularisierte und das regularisierte stochastische Optimierungsproblem (1.68) bzw. (1.110) und sei $(t, x) \in [0, T] \times \mathcal{X}$. Dann gilt für $m \rightarrow \infty$

$$V^m(t, x) \rightarrow V(t, x).$$

Beweis. Aus Theorem 1.3.13 und der Eigenschaft (1.132) folgt:

$$\begin{aligned}
 |V^m(t, x) - V(t, x)| &= |V^m(t, x) - V^0(t, x)| \\
 &= \left| \sup_{u \in \mathcal{U}_M(t,x)} J^m(t, x; u) - \sup_{u \in \mathcal{U}_M(t,x)} J^0(t, x; u) \right| \\
 &\leq \sup_{u \in \mathcal{U}_M(t,x)} |J^m(t, x; u) - J^0(t, x; u)|.
 \end{aligned}$$

Nach Theorem 1.3.13 geht der letzte Ausdruck mit $m \rightarrow \infty$ gegen Null. Somit ist die Konvergenz der Wertfunktion bewiesen. \square

Zum Schluss soll gezeigt werden, dass die optimale Strategie ${}^m u^*$ für das regularisierte Problem (1.110) eine ε -optimale Strategie für das Originalproblem (1.68) ist. Dies eröffnet eine Methode zur näherungsweisen Bestimmung optimaler Strategien für das Originalproblem.

Folgerung 1.3.15 (ε -optimale Strategie ($T < \infty$)). *Für jedes positive $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl $m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m \geq m_0(\varepsilon)$ gilt:*

$$|V(t, x) - J(t, x; \mathfrak{G}({}^m u^*))| \leq \varepsilon,$$

d.h. $\mathfrak{G}({}^m u^*)$ ist eine ε -optimale Strategie für das nichtregularisierte Problem (1.68).

Beweis. Nach (1.131) gilt:

$$\begin{aligned} |V(t, x) - J(t, x; \mathfrak{G}({}^m u^*))| &= |V(t, x) - J^0(t, x; {}^m u^*)| \\ &\leq |V(t, x) - J^m(t, x; {}^m u^*)| + |J^m(t, x; {}^m u^*) - J^0(t, x; {}^m u^*)| \\ &= |V(t, x) - V^m(t, x)| + |J^m(t, x; {}^m u^*) - J^0(t, x; {}^m u^*)|, \end{aligned}$$

wobei $J^m(t, x; {}^m u^*) = V^m(t, x)$ ist.

Gemäß den Konvergenzeigenschaften für die Zielfunktion und die Wertfunktion nach Theorem 1.3.13 und Folgerung 1.3.14 kann man für jedes $\varepsilon > 0$ ein $m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ finden, sodass für alle $m \geq m_0(\varepsilon)$ gilt:

$$|V(t, x) - V^m(t, x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |J^m(t, x; {}^m u^*) - J^0(t, x; {}^m u^*)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Durch Einsetzen der gegebenen Abschätzungen in die letzte Ungleichung folgt die Behauptung. \square

Unendlicher Zeithorizont

Die oben erhaltenen Resultate für das regularisierte stochastische Optimalsteuerungsproblem mit endlichem Zeithorizont lassen sich auch auf den Fall eines unendlichen Zeithorizontes erweitern. Die zum Zustand ${}^0 X^u$ gehörende Ziel- bzw. die Wertfunktion wird analog zu (1.128) bzw. (1.129) wie folgt definiert:

$$J^0(x; u) = \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\rho t} \tilde{F}({}^0 X_t^u, u_t) dt \mid {}^0 X_0^u = x \right], \quad u \in \mathcal{U}_M(x), \quad (1.138)$$

bzw.

$$V^0(x) = \sup_{u \in \mathcal{U}_M(x)} J^0(x; u), \quad x \in \tilde{\mathcal{X}}. \quad (1.139)$$

Die Zielfunktion (1.138) und die Wertfunktion (1.139) stimmen mit ihren unregularisierten Varianten $J(x; u)$ bzw. $V(x)$ überein, u.z.

$$\begin{aligned} J^0(x; u) &= J(x; u), \quad \forall u \in \mathcal{U}(x), x \in \mathcal{X}, \\ V^0(x) &= V(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (1.140)$$

Die Anwendung des Abschneideoperators (1.130) garantiert, dass die Steuerungsprozesse $u \in \mathcal{U}_M(x)$ und $\mathfrak{G}(u) \in \mathcal{U}(x)$ denselben Zustandsprozess ${}^0X^u = {}^0X^{\mathfrak{G}(u)}$ generieren und für alle $x \in \mathcal{X}$ und $u \in \mathcal{U}_M(x)$

$$J^0(x; u) = J^0(x; \mathfrak{G}(u)) = J(x; \mathfrak{G}(u)) \quad (1.141)$$

gilt.

Wie bereits für endlichen Zeithorizont in Theorem 1.3.13 gezeigt wurde, gelingt es auch für $T = \infty$ nachzuweisen, dass die Zielfunktion J^m des regularisierten Problems gegen die Zielfunktion J^0 des nichtregularisierten Problems konvergiert.

Theorem 1.3.16 (Gleichmäßige Konvergenz der Zielfunktion ($T = \infty$)). *Seien $J^0(x; u)$ und $J^m(x; u)$ die Zielfunktionen für das nichtregularisierte und das regularisierte stochastische Optimalsteuerungsproblem (1.139) bzw. (1.121) und $x \in \mathcal{X}$. Dann gilt für $m \rightarrow \infty$*

$$\sup_{u \in \mathcal{U}_M(x)} |J^m(x; u) - J^0(x; u)| \rightarrow 0$$

gleichmäßig in $u \in \mathcal{U}_M(x)$.

Beweis. Zur Vereinfachung der Notation wird im Folgenden anstelle ${}^mX^{(0,x,u)}$, ${}^0X^{(0,x,u)}$ und ${}^mS^{0,s}$ die Notation mX , 0X bzw. mS verwendet.

Sei $u \in \mathcal{U}_M(x)$ eine beliebige zulässige Steuerung. Aus der in Lemma 1.3.3 gezeigten Lipschitz-Bedingung (1.107) für die Funktion F folgt

$$|J^m(x; u) - J^0(x; u)| \leq \overline{C}_L \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\rho t} \left(1 + |{}^mS_t| \right) |{}^mX_t - {}^0X_t| dt \right], \quad \overline{C}_L > 0.$$

Die Anwendung des Satzes von Fubini und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für den Erwartungswert liefert

$$\begin{aligned} |J^m(x; u) - J^0(x; u)| &\leq \overline{C}_L \int_0^\infty e^{-\rho t} \sqrt{\mathbb{E} \left[\left(1 + |{}^mS_t| \right)^2 \right] \mathbb{E} \left[|{}^mX_t - {}^0X_t|^2 \right]} dt \\ &\leq \sqrt{2} \overline{C}_L \int_0^\infty e^{-\rho t} \sqrt{1 + \mathbb{E} \left[({}^mS_t)^2 \right]} \sqrt{\mathbb{E} \left[|{}^mX_t - {}^0X_t|^2 \right]} dt. \end{aligned}$$

Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für das Integral in der letzten Abschätzung folgt weiter:

$$\begin{aligned} |J^m(x; u) - J^0(x; u)| &\leq \sqrt{2} \overline{C}_L \left(\int_0^\infty e^{-\rho t} \left(1 + \mathbb{E} \left[({}^mS_t)^2 \right] \right) dt \int_0^\infty e^{-\rho t} \mathbb{E} \left[|{}^mX_t - {}^0X_t|^2 \right] dt \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.142) \end{aligned}$$

Nach Lemma 1.3.1 gilt für mS die Abschätzung (1.99) für das zweite Moment. Hieraus folgt

$$1 + \mathbb{E}\left[({}^mS_t)^2\right] \leq \overline{C}_s(1 + s^2)(1 + t^2), \quad \overline{C}_s > 0,$$

und

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} \left(1 + \mathbb{E}\left[({}^mS_t)^2\right]\right) dt \leq \overline{C}_s(1 + s^2)I_1 \quad (1.143)$$

mit $I_1 = \int_0^\infty e^{-\rho t}(1 + t^2)dt < C_1$, d.h. das obige Integral (1.143) ist beschränkt.

Für die Abschätzung des zweiten Integrals in (1.142) wird die vom Regularisierungsparameter m und einer Konstanten $C > 0$ abhängige Zeit

$$T_m = \frac{1}{2C} \ln m, \quad (1.144)$$

betrachtet.

Dann gilt folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left|{}^mX_t - {}^0X_t\right|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left|{}^mX_t - {}^mX_{T_m \wedge t} + {}^mX_{T_m \wedge t} - {}^0X_{T_m \wedge t} + {}^0X_{T_m \wedge t} - {}^0X_t\right|^2\right] \\ &\leq 3 \left(\mathbb{E}\left[\left|{}^mX_t - {}^mX_{T_m \wedge t}\right|^2\right] + \mathbb{E}\left[\left|{}^0X_t - {}^0X_{T_m \wedge t}\right|^2\right] \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{E}\left[\left|{}^mX_{T_m \wedge t} - {}^0X_{T_m \wedge t}\right|^2\right] \right). \end{aligned} \quad (1.145)$$

Im Weiteren werden die drei Erwartungswerte auf der rechten Seite von (1.145) einzeln abgeschätzt.

Für den letzten Ausdruck ergibt sich:

$$\mathbb{E}\left[\left|{}^mX_{T_m \wedge t} - {}^0X_{T_m \wedge t}\right|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq r \leq T_m} \left|{}^mX_r - {}^0X_r\right|^2\right] \leq \frac{CT_m}{m} e^{CT_m}, \quad C > 0, \quad (1.146)$$

wobei die im Beweis von Lemma 1.3.12 mit Hilfe des Gronwall-Lemmas abgeleitete Abschätzung (1.137) verwendet wurde.

Für T_m aus (1.144) gilt $\lim_{m \rightarrow \infty} T_m \rightarrow \infty$. Dann ergibt sich für den Ausdruck auf der rechten Seite der Abschätzung (1.146):

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{CT_m}{m} e^{CT_m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln m}{2\sqrt{m}} \rightarrow 0. \quad (1.147)$$

Für die Abschätzung der beiden anderen Ausdrücke in (1.145) wird benutzt, dass falls $t > T_m$ ist, so gelten ${}^mX_t - {}^mX_{T_m \wedge t} = {}^mX_t - {}^mX_{T_m}$ und ${}^0X_t - {}^0X_{T_m \wedge t} = {}^0X_t - {}^0X_{T_m}$. Für $t \leq T_m$ ist ${}^mX_t - {}^mX_{T_m \wedge t} = {}^0X_t - {}^0X_{T_m \wedge t} = 0$. Dies erlaubt, folgende Abschätzung zu

erhalten:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left| {}^m X_t - {}^m X_{T_m \wedge t} \right|^2 \right] &\leq \mathbb{E} \left[\left| \int_{T_m}^t \tilde{a}({}^m X_s, u_s) ds + \int_{T_m}^t \tilde{b}({}^m X_s) dW_s + \frac{\gamma}{\sqrt{m}} (\tilde{B}_t - \tilde{B}_{T_m}) \right|^2 \right] \\ &\leq 3 \left(\mathbb{E} \left[\left| \int_{T_m}^t \tilde{a}({}^m X_s, u_s) ds \right|^2 \right] + \mathbb{E} \left[\left| \int_{T_m}^t \tilde{b}({}^m X_s) dW_s \right|^2 \right] + \frac{\text{tr}[\underline{\gamma}^\top \underline{\gamma}]}{m} (t - T_m) \right). \end{aligned}$$

Gemäß der linearen Wachstumsbedingung (1.103) für die Koeffizienten \tilde{a} und \tilde{b} des Lemmas 1.3.2 lässt sich die obige Abschätzung wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left| {}^m X_t - {}^m X_{T_m \wedge t} \right|^2 \right] &\leq 3 \left(2 C_G^2 \int_{T_m}^t \mathbb{E} \left[\left(1 + |{}^m X_s| \right)^2 \right] ds + \frac{\gamma_q^2 + (d-1)\gamma_\pi^2}{m} (t - T_m) \right) \\ &\leq 3 \left(4 C_G^2 \int_{T_m}^t \left(1 + \mathbb{E} \left[({}^m X_s)^2 \right] \right) ds + \frac{C_2}{m} t \right), \quad C_2 = \gamma_q^2 + (d-1)\gamma_\pi^2 > 0. \end{aligned}$$

Nach Lemma 1.3.1 gilt die Abschätzung (1.97) für das zweite Moment des Prozesses ${}^m X$. Somit ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left| {}^m X_t - {}^m X_{T_m \wedge t} \right|^2 \right] &\leq 12 C_G^2 t + 12 C_G^2 K(1 + |x|^2) \int_{T_m}^t (1 + s^2) ds + \frac{3C_2}{m} t \\ &\leq C_3(1 + |x|^2) \left(1 + \frac{1}{m} \right) (1 + t^3), \quad C_3 > 0. \end{aligned} \tag{1.148}$$

Analog zum Ausdruck (1.148) wird die Abschätzung für ${}^0 X_t - {}^0 X_{T_m \wedge t}$ hergeleitet:

$$\mathbb{E} \left[\left| {}^0 X_t - {}^0 X_{T_m \wedge t} \right|^2 \right] \leq 6 C_G^2 \int_{T_m}^t \mathbb{E} \left[\left(1 + |{}^0 X_s| \right)^2 \right] ds \leq 12 C_G^2 \int_{T_m}^t \left(1 + \mathbb{E} \left[({}^0 X_s)^2 \right] \right) ds.$$

Die Anwendung der Abschätzung (1.127) aus Lemma 1.3.11 für das zweite Moment des Prozesses ${}^0 X$ liefert:

$$\mathbb{E} \left[\left| {}^0 X_t - {}^0 X_{T_m \wedge t} \right|^2 \right] \leq 12 C_G^2 t \left(1 + K(1 + |x|^2) \right) \leq C_4(1 + |x|^2)t, \quad C_4 > 0. \tag{1.149}$$

Um zu beweisen, dass $|J^m(x; u) - J^0(x; u)| \rightarrow 0$ für $m \rightarrow \infty$ gilt, ist es hinreichend zu zeigen, dass in der Beziehung (1.142)

$$\int_0^\infty e^{-\rho t} \left(1 + \mathbb{E} \left[({}^m S_t)^2 \right] \right) dt - \int_0^\infty e^{-\rho t} \mathbb{E} \left[\left| {}^m X_t - {}^0 X_t \right|^2 \right] dt \rightarrow 0 \tag{1.150}$$

erfüllt ist. Unter Verwendung der Ausdrücke (1.143), (1.145)-(1.146) und (1.148)-(1.149) gilt für (1.150):

$$C_1 \int_0^\infty e^{-\rho t} \mathbb{E} \left[\left| {}^m X_t - {}^0 X_t \right|^2 \right] dt \leq C_5 (1 + |x|^2) \left(1 + \frac{1}{m} \right) I_2(m) + C_1 \frac{3}{\rho} \frac{CT_m}{m} e^{CT_m}$$

mit dem Integral $I_2(m) = \int_{T_m}^\infty e^{-\rho t} (1 + t^3) dt$, wobei $C_1, C_5 > 0$ positive, von T_m unabhängige Konstanten sind. Es gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m} \right) I_1(m) \rightarrow 0. \quad (1.151)$$

In Hinblick auf (1.147) und (1.151) konvergiert der Ausdruck (1.150) gegen Null. Somit ergibt sich für $m \rightarrow \infty$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |J^m(x; u) - J^0(x; u)| \rightarrow 0.$$

Das Theorem ist somit bewiesen. \square

Aus der Konvergenz der Zielfunktion folgt die Konvergenz der Wertfunktion.

Folgerung 1.3.17 (Punktweise Konvergenz der Wertfunktion ($T = \infty$)). *Seien $V(x)$ und $V^m(x)$ die Wertfunktionen für das nichtregularisierte und das regularisierte stochastische Optimierungproblem (1.79) bzw. (1.121) und sei $x \in \mathcal{X}$. Dann gilt für $m \rightarrow \infty$*

$$V^m(x) \rightarrow V(x).$$

Beweis. Der Beweis folgt direkt aus Theorem 1.3.16 und verläuft analog zu Folgerung 1.3.14. \square

Analog zu Folgerung 1.3.15 stellt man fest, dass im Falle des unendlichen Zeithorizontes ($T = \infty$) die optimale Steuerung ${}^m u^*$ für das regularisierte Problem (1.121) ε -optimal für das Originalproblem (1.79) ist.

Folgerung 1.3.18 (ε -optimale Strategie ($T = \infty$)). *Für jedes positive $\varepsilon > 0$ existiert eine natürliche Zahl $m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m \geq m_0(\varepsilon)$ gilt:*

$$|V(x) - J(x; \mathfrak{G}({}^m u^*))| \leq \varepsilon,$$

d.h. $\mathfrak{G}({}^m u^)$ ist eine ε -optimale Strategie für das nichtregularisierte Problem (1.79).*

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zum Beweis der Folgerung 1.3.15 und verwendet Theorem 1.3.16 und Folgerung 1.3.17. \square

Lösung der Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung

In Kapitel 1 wurde für die Lösung des betrachteten stochastischen optimalen Steuerungsproblems für einen Pumpspeicher die zugehörige HJB-Gleichung für die Wertfunktion des Problems aufgestellt und untersucht. Wenn die entsprechenden Annahmen für die Verifikationssätze erfüllt sind, dann liefert die Lösung der HJB-Gleichung die Wertfunktion, mit deren Hilfe auch die optimale Steuerung bestimmt werden kann.

Im vorliegenden Fall ist eine analytische Lösung der HJB-Gleichung nicht zu erwarten. Daher werden in diesem Kapitel auf Differenzenverfahren aufbauende numerische Methoden zur Lösung der HJB-Gleichung behandelt. Dies erfolgt exemplarisch für einen Fall einer Markov-Kette mit $d = 2$ Zuständen, für den der im Zustand X^u des Kontrollsystems enthaltene Filter Π lediglich eindimensional ist. Außerdem wird ein PumpspeichermodeLL ohne externen Zufluss betrachtet. Dies führt zu einem Kontrollproblem mit dem dreidimensionalen Zustand $X^u = (Q^u, S, \Pi)$.

Für das Problem mit endlichem Zeithorizont wird zunächst ein semi-regularisiertes Optimierungsproblem betrachtet, bei dem die SDE für den Füllstand Q^u nicht regularisiert wird. Hierfür steht mit dem Semi-Lagrange-Approximationsschema für die numerische Lösung der HJB-Gleichung ein sehr effizientes Lösungsverfahren zur Verfügung, dessen Eigenschaften untersucht werden. Außerdem wird das voll-regularisierte Optimierungsproblem behandelt, für das ein explizit-implizites Differenzenschema entwickelt wird.

Für das Steuerungsproblem mit unendlichem Zeithorizont ist die zugeordnete HJB-Gleichung eine (nichtlineare) PDE, die zwar nicht mehr von der Zeit abhängt, allerdings können die zuvor für die Lösung der zeitabhängigen HJB-Gleichung entwickelten numerischen Verfahren nicht direkt übertragen werden. Aus diesem Grund wird eine iterative Lösung des Steuerungsproblems mit dem Policy-Improvement-Algorithmus verwendet. Dabei ist in jedem Iterationsschritt eine lineare zeitunabhängige PDE zu lösen. Hierfür kommen wieder Differenzenverfahren zum Einsatz. Die genannten Verfahren werden exemplarisch für ein Modell mit vollständiger Information über die Driftparameter des Preisprozesses, d.h. für ein Steuerungsproblem mit

zweidimensionalem Zustand $X^u = (Q^u, S)$ behandelt.

2.1 Endlicher Zeithorizont

Dieser Abschnitt widmet sich der numerischen Lösung des in Kapitel 1 betrachteten stochastischen Optimalsteuerungsproblems für einen Pumpspeicher für den Fall eines endlichen Zeithorizontes. Dabei erfolgt eine Beschränkung auf ein Modell ohne externen Zufluss und mit einem durch einen OU-Prozess beschriebenen Energiepreis, dessen Driftkoeffizienten durch eine nicht-beobachtbare Markov-Kette mit $d = 2$ Zuständen moduliert werden. Dies führt zu einem dreidimensionalen Zustandsprozess $(X_t^u)_{t \in [0, T]} := (Q_t^u, S_t, \Pi_t)_{t \in [0, T]}$, dessen Dynamik durch ein System von SDEs vom Typ (1.65) beschrieben wird:

$$\begin{aligned} dQ_t^u &= \psi(Q_t^u, u_t) dt, & Q_0^u &= q_0, \\ dS_t &= \hat{a}_S(S_t, \Pi_t) dt + b_S(S_t) d\widetilde{W}_t^S, & S_0 &= s_0, \\ d\Pi_t &= \alpha(\Pi_t) dt + \beta(S_t, \Pi_t) d\widetilde{W}_t^S, & \Pi_0 &= \pi_0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Für $d = 2$ ist der Filter Π ein skalarer Prozess. Das obige System von drei SDEs wird lediglich durch den eindimensionalen Wiener-Prozess $(\widetilde{W}_t^S)_{t \in [0, T]}$ getrieben. Dies führt zu einer im Diffusionsteil entarteten HJB-Gleichung, für die in Abschnitt 1.3 eine Regularisierungsprozedur vorgestellt wurde. Bei dieser werden in der Gleichung für Q^u ein additives Rauschen in der Form $\frac{\gamma_q}{\sqrt{m}} dB_t^Q$ und in der Gleichung für Π ein Rauschterm $\frac{\gamma_\pi}{\sqrt{m}} dB_t^{(1)}$ hinzugefügt, wobei $B^Q, B^{(1)}$ unabhängige und von \widetilde{W}^S unabhängige Wiener-Prozesse, $\gamma_q, \gamma_\pi > 0$ Konstanten und $m \in \mathbb{N}$ ein (hinreichend großer) Regularisierungsparameter ist. Aus analytischer Sicht gewinnt man für die dem regularisierten Kontrollproblem zugeordnete HJB-Gleichung die Existenz und Eindeutigkeit einer klassischen Lösung, welche Grundlage für Verifikationssätze ist. Auch aus numerischer Sicht ist diese im Diffusionsteil elliptische HJB-Gleichung günstig, da zur Diskretisierung Differenzenschemata höherer Konvergenzordnung zur Verfügung stehen. Auf diese wird in Abschnitt 2.1.5 näher eingegangen. Zuvor wird ein weiteres elegantes und effizientes Differenzenschema vorgestellt, welches für das semi-regularisierte Optimalsteuerungsproblem entwickelt wird. Bei diesem wird lediglich die SDE für den Filter Π regularisiert, während die SDE für den Füllstand Q^u unverändert bleibt. Dies erlaubt die Anwendung der aus der Literatur bekannten Semi-Lagrange-Approximationsmethode (siehe Chen u. Forsyth [11], [12]). Für das so in den Abschnitten 2.1.2 und 2.1.3 entwickelte Differenzenschema werden in Abschnitt 2.1.4 wichtige Eigenschaften wie Stabilität, Konsistenz, Monotonie und Konvergenz gezeigt. Die dabei verwendeten Methoden können auch auf das in Abschnitt 2.1.5 entwickelte explizit-implizite Differenzenschema für das voll-regularisierte Optimalsteuerungsproblem übertragen werden. Es sei an dieser Stelle bereits bemerkt, dass die in Abschnitt 3.2 vorgestellten Ergebnisse von numerischen Experimenten für die beiden Differenzenschemata für hinreichend große Werte des Regularisierungsparameters m nahezu identisch sind. Außerdem sei darauf hingewiesen, dass zur Verbesserung der Lesbarkeit die Details zur Aufstellung der Differenzenschemata in Anhang B dargestellt und in diesem Kapitel lediglich die wichtigsten Ergebnisse zitiert werden.

2.1.1 Semi-regularisiertes Optimalsteuerungsproblem

Wir betrachten ein Optimalsteuerungsproblem, bei dem die Dynamik des Zustandsprozesses durch ein System von SDEs in der Form (2.1) gegeben ist und die Gleichung für den Filter Π ein zusätzliches additives Rauschen enthält:

$$\begin{aligned} d {}^m Q_t^u &= \psi({}^m Q_t^u, u_t) dt, & {}^m Q_0^u &= q_0, \\ d {}^m S_t &= \tilde{a}_S({}^m S_t, {}^m \Pi_t) dt + b_S({}^m S_t) d\tilde{W}_t^S, & {}^m S_0 &= s_0, \\ d {}^m \Pi_t &= \tilde{\alpha}({}^m \Pi_t) dt + \tilde{\beta}({}^m S_t, {}^m \Pi_t) d\tilde{W}_t^S + \frac{\gamma_\pi}{\sqrt{m}} dB_t^{(1)}, & {}^m \Pi_0 &= \pi_0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dabei sind $B^{(1)}$ ein von \tilde{W}^S unabhängiger Wiener-Prozess, $\gamma_\pi > 0$ und $m \in \mathbb{N}$. Für die Koeffizienten der SDE (2.2) ergibt sich im betrachteten Modell mit $d = 2$ Zuständen der Markov-Kette:

$$\begin{aligned} \psi(q, y) &= -\mathfrak{h}(q) \cdot y \quad \text{mit} \quad \mathfrak{h}(q) = \frac{c_P}{A(q)}, \\ \tilde{a}_S(s, \pi) &= \varsigma(\pi) \left(\pi \kappa_1 \mu_1 + (1 - \pi) \kappa_2 \mu_2 - (\pi \kappa_1 + (1 - \pi) \kappa_2) s \right), \\ b_S(s) &= \sigma, \\ \tilde{\alpha}(\pi) &= \varsigma(\pi) \left(\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \pi \right), \\ \tilde{\beta}(s, \pi) &= \varsigma(\pi) \pi (1 - \pi) \frac{1}{\sigma} \left(\kappa_1 \mu_1 - \kappa_2 \mu_2 - (\kappa_1 - \kappa_2) s \right), \\ \varsigma(\pi) &= \left(1 - \frac{\text{dist}(\pi, \mathcal{P})}{\varepsilon_\pi} \right) \vee 0 = \begin{cases} 1 + \frac{\pi}{\varepsilon_\pi}, & \pi \in [-\varepsilon_\pi, 0], \\ 1, & \pi \in (0, 1), \\ 1 - \frac{\pi-1}{\varepsilon_\pi}, & \pi \in [1, 1 + \varepsilon_\pi], \\ 0, & \pi \in \mathbb{R} \setminus [-\varepsilon_\pi, 1 + \varepsilon_\pi]. \end{cases} \end{aligned}$$

Der regularisierte Prozess ${}^m \Pi$ nimmt nun Werte in ganz \mathbb{R} und nicht nur in $\mathcal{P} = [0, 1]$ an. Da der Prozess ${}^m Q^u$ unregularisiert bleibt, nimmt er seine Werte nach wie vor im abgeschlossenen Intervall $[\underline{q}, \bar{q}]$ an. Damit bleibt auch die Menge der zulässigen Steuerungswerte $\mathcal{U}(q)$ für alle $q \in [\underline{q}, \bar{q}]$ unverändert.

Mit der semi-regularisierten SDE (2.2) assoziiert man ein stochastisches optimales Steuerungsproblem der Form (1.109)-(1.110) mit der Zustandsvariablen $x := (q, s, \pi) \in \tilde{\mathcal{X}}$, $\tilde{\mathcal{X}} := \mathcal{Q} \times \mathcal{S} \times \mathbb{R}$, und der Zielfunktion

$$\begin{aligned} J^m(t, x; u) &= \mathbb{E} \left[\int_t^T e^{-\rho(r-t)} F({}^m X_r^u, u_r) dr + e^{-\rho(T-t)} \Phi({}^m X_T^u) \mid {}^m X_t^u = x \right], \\ \forall(t, x) &\in [0, T] \times \tilde{\mathcal{X}}, \quad u \in \mathcal{U}(t, x), \end{aligned} \quad (2.3)$$

und der Wertfunktion

$$V^m(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{U}(t, x)} J^m(t, x; u), \quad (2.4)$$

mit der Menge $\mathcal{U}(t, x)$ der zulässigen Markov-Steuerungsprozesse. Die Gewinn- und Endauszahlungsfunktion F bzw. Φ können im Gegensatz zu Paragraph 1.3 in unveränderter Form verwendet werden, da sie nicht explizit von der regularisierten Variablen ${}^m\Pi$ abhängen und der Füllstand nicht regularisiert wird.

Die HJB-Gleichung für das semi-regularisierte stochastische Optimierungsproblem (2.4) ergibt sich analog zur Gleichung (1.112)-(1.113) als

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} V^m(t, x) + ({}^m\mathcal{L} - \rho) V^m(t, x) \\ + \sup_{y \in \mathcal{U}(q)} \left\{ -\mathfrak{h}(q) \cdot y \frac{\partial}{\partial q} V^m(t, x) + F(x, y) \right\} = 0, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \tilde{\mathcal{X}}, \quad (2.5) \\ V^m(T, x) = \Phi(x), \quad \forall x \in \tilde{\mathcal{X}}, \end{aligned}$$

mit dem elliptischen Differentialoperator 2. Ordnung

$$\begin{aligned} {}^m\mathcal{L} = & \varsigma(\pi) \left((\pi\kappa_1\mu_1 + (1-\pi)\kappa_2\mu_2) - (\pi\kappa_1 + (1-\pi)\kappa_2)s \right) \frac{\partial}{\partial s} \\ & + \varsigma(\pi) \left(\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\pi \right) \frac{\partial}{\partial \pi} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_\pi^2}{m} + \left(\varsigma(\pi)\pi(1-\pi) \frac{1}{\sigma} \left((\kappa_1\mu_1 - \kappa_2\mu_2) - (\kappa_1 - \kappa_2)s \right) \right)^2 \right) \frac{\partial^2}{\partial \pi^2} \\ & + \varsigma(\pi)\pi(1-\pi) \left((\kappa_1\mu_1 - \kappa_2\mu_2) - (\kappa_1 - \kappa_2)s \right) s \frac{\partial^2}{\partial s \partial \pi}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Für die numerische Lösung des Endwertproblems (2.5) für die HJB-Gleichung ist es zweckmäßig, dieses durch eine Zeitumkehr und Verwendung der Restlaufzeit $\tau = T - t \in [0, T]$ in ein Anfangswertproblem für die Funktion $\tilde{V}^m(\tau, x) := V^m(T - \tau, x)$ zu transformieren. Dabei sind in (2.5) lediglich die partiellen Ableitungen nach der Zeit gemäß $\tilde{V}_\tau^m = -V_t^m$ umzurechnen.

Weil ${}^m u_t = w(t, {}^m X_t^u)$ eine Markov-Steuerung ist, definiert man sie für $\tau = T - t$ als ${}^m \tilde{u}_\tau = \tilde{w}(\tau, {}^m X_\tau^{\tilde{u}})$ mit einer Borelfunktion $\tilde{w} : [0, T] \times \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathbb{R}$, für die $\tilde{w}(\tau, x) = w(T - \tau, x)$ gilt.

Das so erhaltene Anfangswertproblem für \tilde{V}^m lautet dann

$$\begin{aligned} \tilde{V}_\tau^m = ({}^m\mathcal{L} - \rho) \tilde{V}^m(\tau, x) + \sup_{y \in \mathcal{U}(q)} \left\{ -\mathfrak{h}(q) \cdot y \frac{\partial}{\partial q} \tilde{V}^m(\tau, x) + F(x, y) \right\}, \\ \forall (\tau, x) \in (0, T] \times \tilde{\mathcal{X}}, \quad (2.7) \\ \tilde{V}^m(0, x) = \Phi(x), \quad \forall x \in \tilde{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

Der Kandidat für die optimale Strategie $\tilde{w}^*(\tau, x)$ wird für alle $(\tau, x) \in (0, T] \times \tilde{\mathcal{X}}$ als Lösung

$$\tilde{w}^*(\tau, x) = \arg \max_{y \in \mathcal{U}(q)} \left\{ -\mathfrak{h}(q) \cdot y \frac{\partial}{\partial q} \tilde{V}^m(\tau, x) + F(x, y) \right\}$$

des nichtlinearen punktwweisen Optimierungsproblems bestimmt, dessen Lösung in (1.92) gegeben ist.

Um die Lesbarkeit zu verbessern, wird der Hilfsindex m im Folgenden weggelassen. Außerdem ist es für die nachfolgende Erklärung des Differenzenverfahrens, das zur Lösung der stochastischen Optimierungsaufgabe verwendet wird, hilfreich, den Differentialoperator \mathcal{L} aus (2.6) wie folgt umzuschreiben:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\tilde{V} &= \mathcal{L}_1\tilde{V} + \mathcal{L}_2\tilde{V} + 2 \cdot \mathcal{L}_{12}\tilde{V}, \quad (s, \pi) \in \mathcal{S} \times \mathbb{R}, \\ \mathcal{L}_1\tilde{V} &= \frac{\partial}{\partial \pi} \left(b_1(s, \pi) \frac{\partial}{\partial \pi} \tilde{V} \right) + a_1(s, \pi) \frac{\partial}{\partial \pi} \tilde{V}, \\ \mathcal{L}_2\tilde{V} &= \frac{\partial}{\partial s} \left(b_2(s, \pi) \frac{\partial}{\partial s} \tilde{V} \right) + a_2(s, \pi) \frac{\partial}{\partial s} \tilde{V}, \\ \mathcal{L}_{12}\tilde{V} &= b_{12}(s, \pi) \frac{\partial^2}{\partial \pi \partial s} \tilde{V},\end{aligned}\tag{2.8}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}b_1(s, \pi) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_\pi^2}{m} + \left(\check{b}(s) \varsigma(\pi) \pi (1 - \pi) \right)^2 \right), \\ b_2(s, \pi) &= \frac{\sigma^2}{2}, \\ b_{12}(s, \pi) &= \frac{1}{2} \sigma \check{b}(s) \varsigma(\pi) \pi (1 - \pi), \\ \check{b}(s) &= \frac{1}{\sigma} \left((\kappa_1 \mu_1 - \kappa_2 \mu_2) - (\kappa_1 - \kappa_2) s \right).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Um die in Anhang B.3 beschriebene Approximation für den Differentialoperator \mathcal{L} verwenden zu können, wird der Differentialoperator (2.8) weiterhin in der Form (B.34) dargestellt:

$$(\mathcal{L} - c)\tilde{V} = (\mathcal{L}_1 - c_1)\tilde{V} + (\mathcal{L}_2 - c_2)\tilde{V} + 2 \cdot \mathcal{L}_{12}\tilde{V}, \quad (s, \pi) \in \mathcal{S} \times \mathbb{R},\tag{2.10}$$

mit $c = c_1 + c_2$, wobei $c_1 = c_2 = \frac{\rho}{2} > 0$ ist.

Da der Diffusionskoeffizient $b_2(s, \pi) = \frac{\sigma^2}{2}$ konstant ist, gilt

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(b_2(s, \pi) \frac{\partial}{\partial s} \tilde{V} \right) = b_2(s, \pi) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \tilde{V}$$

in der dritten Gleichung von (2.8). Für $b_1(s, \pi)$ aus der zweiten Gleichung von (2.8) liefert die Produktregel

$$\frac{\partial}{\partial \pi} \left(b_1(s, \pi) \frac{\partial}{\partial \pi} \tilde{V} \right) = \frac{\partial}{\partial \pi} b_1(s, \pi) \frac{\partial}{\partial \pi} \tilde{V} + b_1(s, \pi) \frac{\partial^2}{\partial \pi^2} \tilde{V}$$

mit

$$\frac{\partial}{\partial \pi} b_1(s, \pi) = \check{b}^2(s) \varsigma(\pi) \pi (1 - \pi) \left(\varsigma(\pi) (1 - 2\pi) + \frac{\partial}{\partial \pi} \varsigma(\pi) \pi (1 - \pi) \right).\tag{2.11}$$

Mit dem Ausdruck in (2.11) ergibt sich für die Koeffizienten a_1 und a_2 im Differentialoperator (2.10):

$$\begin{aligned}a_1(s, \pi) &= \varsigma(\pi) (\lambda_2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \pi) - \frac{\partial}{\partial \pi} b_1(s, \pi), \\ a_2(s, \pi) &= \varsigma(\pi) (\check{b}(s) \pi \sigma + \kappa_2 (\mu_2 - s)),\end{aligned}\tag{2.12}$$

für alle $(s, \pi) \in \mathcal{S} \times \mathbb{R}$.

Es sei bemerkt, dass für die Koeffizienten (2.9) und (2.12) die Argumente (s, π) in Anhang B.3 vertauscht sind, d.h. dort entsprechen die allgemeinen Variablen x_1 und x_2 den Variablen π bzw. s , sodass für die Argumente die Reihenfolge (π, s) vorliegt.

Bemerkung 2.1.1. Wenn nur das Gleichgewichtsniveau $\mu(Y_t)$ oder nur die Steifigkeit $\kappa(Y_t)$ vom Faktor-Prozess Y getrieben wird, dann gilt für die Koeffizienten \check{b} und a_2 :

$$\begin{aligned} \text{für } \kappa(Y_t) \equiv \kappa: \quad & \check{b}(s) = \frac{1}{\sigma} \kappa (\mu_1 - \mu_2) \quad , \\ & a_2(s, \pi) = \varsigma(\pi) (\check{b}(s) \pi \sigma + \kappa (\mu_2 - s)) ; \\ \text{für } \mu(Y_t) \equiv \mu: \quad & \check{b}(s) = \frac{1}{\sigma} (\kappa_1 - \kappa_2) (\mu - s) \quad , \\ & a_2(s, \pi) = \varsigma(\pi) (\check{b}(s) \pi \sigma + \kappa_2 (\mu - s)) . \end{aligned}$$

2.1.2 Diskretisierung der Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung

Für die nachfolgende Entwicklung des Differenzenschemas zur numerischen Lösung der HJB-Gleichung (2.7) und zur Bestimmung der optimalen Strategie ist zuerst die Angabe eines Gitters auf $[0, T] \times \mathcal{X}$ erforderlich. Hierfür muss der unbeschränkte Zustandsraum $\mathcal{X} = [q, \bar{q}] \times \mathcal{S} \times \mathbb{R}$ auf ein beschränktes Berechnungsgebiet $\tilde{\mathcal{X}}^D = [q, \bar{q}] \times \tilde{\mathcal{S}}^D \times \tilde{\mathcal{P}}^D$ abgeschnitten werden. Für die τ - bzw. q -Richtungen sind die abgeschlossenen Intervalle $[0, T]$ bzw. $[q, \bar{q}]$ bereits gegeben. Was den mittels des OU-Prozesses modellierten Energiepreis angeht, so wird sein Wertebereich $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ durch ein abgeschlossenes Intervall $\tilde{\mathcal{S}}^D := [\underline{s}, \bar{s}]$ ersetzt, in welchem die Werte des Zufallsprozesses S mit hoher Wahrscheinlichkeit liegen. In Hinblick auf die stationäre Verteilung des OU-Prozesses mit konstanten Parametern μ und κ , welche durch die Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{2\kappa})$ gegeben ist, motiviert die 3- σ -Regel die folgende Wahl der Grenzen \underline{s} und \bar{s} :

$$\tilde{\mathcal{S}}^D = [\underline{s}, \bar{s}] = \left[\min \left(\mu_1 - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa_1}}, \mu_2 - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa_2}} \right), \max \left(\mu_1 + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa_1}}, \mu_2 + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa_2}} \right) \right] .$$

Bemerkung 2.1.2. Falls nur einer der Parameter μ oder κ vom Faktorprozess Y abhängt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}^D = [\underline{s}, \bar{s}] &= \left[\mu_2 - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa}}, \mu_1 + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa}} \right] , & \text{falls } \kappa(Y_t) \equiv \kappa, \mu_1 \geq \mu_2 , \\ \tilde{\mathcal{S}}^D = [\underline{s}, \bar{s}] &= \left[\mu - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{2 \min\{\kappa_1, \kappa_2\}}}, \mu + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{2 \min\{\kappa_1, \kappa_2\}}} \right] , & \text{falls } \mu(Y_t) \equiv \mu . \end{aligned}$$

Die Filterwahrscheinlichkeit π wird anstatt in \mathbb{R} auf dem abgeschlossenen Intervall $\tilde{\mathcal{P}}^D := [\underline{\pi}, \bar{\pi}]$ mit $\underline{\pi} = -\varepsilon_\pi - \tilde{\varepsilon}_\pi$ und $\bar{\pi} = 1 + \varepsilon_\pi + \tilde{\varepsilon}_\pi$ betrachtet, wobei auf den Teilintervallen $[\underline{\pi}, -\varepsilon_\pi]$ und $[1 + \varepsilon_\pi, \bar{\pi}]$ die Koeffizienten a_1, a_2, b_1 und b_{12} gleich Null sind.

Sei nun

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{G}} &= \bar{\mathcal{G}}_\tau \times \bar{\mathcal{G}}_q \times \bar{\mathcal{G}}_s \times \bar{\mathcal{G}}_\pi \\ &= [\tau_0, \dots, \tau_{N_\tau}] \times [q_0, \dots, q_{N_q}] \times [s_0, \dots, s_{N_s}] \times [\pi_0, \dots, \pi_{N_\pi}] \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{G}}_\tau &= \left\{ \tau_n = 0 + n \cdot \Delta_\tau, n = 0, \dots, N_\tau \right\}, \\ \bar{\mathcal{G}}_q &= \left\{ q_i = \underline{q} + i \cdot \Delta_q, i = 0, \dots, N_q \right\}, \\ \bar{\mathcal{G}}_s &= \left\{ s_j = \underline{s} + j \cdot \Delta_s, j = 0, \dots, N_s \right\}, \\ \bar{\mathcal{G}}_\pi &= \left\{ \pi_k = \underline{\pi} + k \cdot \Delta_\pi, k = 0, \dots, N_\pi \right\},\end{aligned}$$

ein auf $\bar{G} = [0, T] \times \tilde{\mathcal{X}}^D$ definiertes vierdimensionales äquidistantes Rechtecksgitter mit den Zeit- bzw. Ortsschrittweiten

$$\Delta_\tau = \frac{T}{N_\tau}, \quad \Delta_q = \frac{\bar{q} - \underline{q}}{N_q}, \quad \Delta_s = \frac{\bar{s} - \underline{s}}{N_s}, \quad \Delta_\pi = \frac{\bar{\pi} - \underline{\pi}}{N_\pi} = \frac{1 + 2(\varepsilon_\pi + \tilde{\varepsilon}_\pi)}{N_\pi},$$

und der Anzahl der Gitterpunkte $N_\tau + 1$, $N_q + 1$, $N_s + 1$ und $N_\pi + 1$ für die Restlaufzeit τ , den Füllstand q , den Preis s bzw. den Filter π .

Auf dem eingeführten äquidistanten Gitter $\bar{\mathcal{G}}$ wird die Gitterfunktion

$$\tilde{V}_\Delta(\tau_n, q_i, s_j, \pi_k) = \tilde{V}_{i,j,k}^n$$

von vier Variablen mit $(\tau_n, q_i, s_j, \pi_k) \in \bar{\mathcal{G}}$ definiert, die ein diskretes Analogon für die kontinuierliche Wertfunktion $\tilde{V}(\tau, q, s, \pi)$ mit $(\tau, q, s, \pi) \in \bar{G}$ ist.

Bemerkung 2.1.3. Den oben eingeführten Bezeichnungen entspricht folgende Notation aus Anhang B.3.2: die allgemeinen Variablen x_1 und x_2 dort stehen für π und s , die Gitterpunkte $x_1^{j_1}$ und $x_2^{j_2}$ entsprechen π_k und s_j , die Ortsschrittweiten Δ_1 und Δ_2 stimmen mit Δ_π und Δ_s überein.

Für das nachfolgend aufgestellte Differenzenschema zur numerischen Lösung der HJB-Gleichung (2.7) sind wegen der Einschränkung des (in s und π) unbeschränkten Zustandsraumes \mathcal{X} auf ein beschränktes Berechnungsgebiet \mathcal{X}^D auf den so neu entstandenen Rändern, d.h. für $s = \underline{s}, \bar{s}$ und $\pi = \underline{\pi}, \bar{\pi}$, Randbedingungen zu formulieren.

Über das Verhalten der Wertfunktion für große s und π lassen sich nur schwer Eigenschaften der Funktionswerte oder der Ableitungen erster Ordnung bestimmen, welche die Konstruktion von Dirichlet-, Neumann- oder Robin-Randbedingungen erlauben. Um die Auswirkungen von Fehlern bei der Vorgabe der Randbedingungen auf die Lösung der Gleichung zu beschränken, wird daher in der Literatur häufig gefordert, dass die Ableitungen zweiter Ordnung am Rand verschwinden. Aus dieser vergleichsweise „schwachen“ Forderung folgt lediglich, dass die Lösungsfunktion sich am Rand linear verhält, während keine Forderungen an die Werte und Ableitungen erster Ordnung gestellt werden müssen.

Für die HJB-Gleichung (2.7) führt dieses Vorgehen zu folgenden Randbedingungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial s^2} \tilde{V}(\tau, q, \underline{s}, \pi) &= \frac{\partial^2}{\partial s^2} \tilde{V}(\tau, q, \bar{s}, \pi) = 0, & (\tau, q, \pi) &\in (0, T] \times [\underline{q}, \bar{q}] \times [\underline{\pi}, \bar{\pi}], \\ \frac{\partial^2}{\partial \pi^2} \tilde{V}(\tau, q, s, \underline{\pi}) &= \frac{\partial^2}{\partial \pi^2} \tilde{V}(\tau, q, s, \bar{\pi}) = 0, & (\tau, q, s) &\in (0, T] \times [\underline{q}, \bar{q}] \times [\underline{s}, \bar{s}], \\ \frac{\partial^2}{\partial s \partial \pi} \tilde{V}(\tau, q, \underline{s}, \pi) &= \frac{\partial^2}{\partial s \partial \pi} \tilde{V}(\tau, q, \bar{s}, \pi) = 0, & (\tau, q, \pi) &\in (0, T] \times [\underline{q}, \bar{q}] \times [\underline{\pi}, \bar{\pi}].\end{aligned}$$

Das Verschwinden der gemischten Ableitung zweiter Ordnung am Rand für $\pi = \underline{\pi}, \bar{\pi}$ muss nicht explizit gefordert werden, da bereits der Koeffizient $b_{12}(s, \pi)$ an diesem Rand verschwindet.

Für die nachfolgend entwickelten Differenzenschemata werden in Anhang B.3 (siehe Annahme B.3.1) Bedingungen formuliert, unter denen die Schemata Eigenschaften wie Stabilität, Konsistenz, Monotonie und Konvergenz besitzen. Diese Bedingungen sind erfüllt, wenn für die Koeffizienten (2.9) und (2.12) der HJB-Gleichung (2.7) folgende Bedingungen erfüllt sind:

- die den Diffusionsteil von \mathcal{L} aus (2.8) beschreibende Matrix

$$\begin{pmatrix} b_1(s, \pi) & b_{12}(s, \pi) \\ b_{12}(s, \pi) & b_2(s, \pi) \end{pmatrix}$$

ist positiv definit für alle $(s, \pi) \in [\underline{s}, \bar{s}] \times [\underline{\pi}, \bar{\pi}]$ und $b_{12}(s, \underline{\pi}) = b_{12}(s, \bar{\pi}) = 0$ für alle $s \in [\underline{s}, \bar{s}]$;

- auf den Rändern von $\tilde{\mathcal{S}}^D \times \tilde{\mathcal{P}}^D$ gelten folgende Ungleichungen:

$$r_1(s, \underline{\pi}) = \frac{\partial}{\partial \pi} b_1(s, \underline{\pi}) + a_1(s, \underline{\pi}) \geq 0, \quad s \in [\underline{s}, \bar{s}], \quad (2.13a)$$

$$r_1(s, \bar{\pi}) = \frac{\partial}{\partial \pi} b_1(s, \bar{\pi}) + a_1(s, \bar{\pi}) \leq 0, \quad s \in [\underline{s}, \bar{s}], \quad (2.13b)$$

$$r_2(\underline{s}, \pi) = \frac{\partial}{\partial s} b_2(\underline{s}, \pi) + a_2(\underline{s}, \pi) \geq 0, \quad \pi \in [\underline{\pi}, \bar{\pi}], \quad (2.13c)$$

$$r_2(\bar{s}, \pi) = \frac{\partial}{\partial s} b_2(\bar{s}, \pi) + a_2(\bar{s}, \pi) \leq 0, \quad \pi \in [\underline{\pi}, \bar{\pi}]. \quad (2.13d)$$

Aus den Ausdrücken (2.9) folgt unmittelbar die positive Definitheit der Diffusionsmatrix, da

$$\begin{aligned} b_1(s, \pi), b_2(s, \pi) &> 0, \\ b_1(s, \pi) \cdot b_2(s, \pi) - b_{12}^2(s, \pi) &= \frac{\gamma_\pi^2}{2m} > 0, \quad \forall (s, \pi) \in [\underline{s}, \bar{s}] \times [\underline{\pi}, \bar{\pi}]. \end{aligned}$$

Aus den Darstellungen (2.9) für b_1 und (2.12) für a_1 folgt, dass für $\pi \in \mathbb{R} \setminus [-\varepsilon_\pi, 1 + \varepsilon_\pi]$ gilt $b_1(s, \pi) = \frac{\gamma_\pi^2}{2m} = \text{const}$ und $a_1(s, \pi) = 0$, da die Funktion $\varsigma(\pi)$ dort verschwindet. Somit gilt $r_1(s, \underline{\pi}) = r_2(s, \bar{\pi}) = 0$ und die Ungleichungen (2.13a)-(2.13b) sind sogar stets mit Gleichheit erfüllt. Die beiden Ungleichungen (2.13c)-(2.13d) sind dagegen nur unter zusätzlichen Annahmen an die Modellparameter erfüllt.

Annahme 2.1.4. Die Parameter $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$, $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ des Preismodells (1.16), die Grenzen \underline{s} und \bar{s} des Berechnungsgebiets $\tilde{\mathcal{S}}^D := [\underline{s}, \bar{s}]$ und der bei der Regularisierung auftauchende Parameter $\varepsilon_\pi > 0$ genügen folgenden Bedingungen:

$$\underline{s} < \mu_2 \leq \mu_1 < \bar{s}, \quad (2.14)$$

$$\frac{1}{c_\varepsilon} \cdot \frac{\mu_1 - \underline{s}}{\mu_2 - \underline{s}} \leq \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \leq c_\varepsilon \cdot \frac{\bar{s} - \mu_1}{\bar{s} - \mu_2} \quad \text{mit} \quad c_\varepsilon = 1 + \frac{1}{\varepsilon_\pi} > 1. \quad (2.15)$$

Lemma 2.1.5. *Unter der Annahme 2.1.4 sind die Ungleichungen (2.13c)-(2.13d) erfüllt.*

Beweis. Mit den Darstellungen (2.9) und (2.12) für die Koeffizienten b_2 bzw. a_2 lauten die Ungleichungen (2.13c)-(2.13d)

$$\begin{aligned} r_2(\underline{s}, \pi) &= a_2(\underline{s}, \pi) = \varsigma(\pi) \left(\check{b}(\underline{s})\pi\sigma + \kappa_2(\mu_2 - \underline{s}) \right) \geq 0, \\ r_2(\bar{s}, \pi) &= a_2(\bar{s}, \pi) = \varsigma(\pi) \left(\check{b}(\bar{s})\pi\sigma + \kappa_2(\mu_2 - \bar{s}) \right) \leq 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

für alle $\pi \in [\underline{\pi}, \bar{\pi}]$.

Für $\pi \in [\underline{\pi}, \bar{\pi}] \setminus (-\varepsilon_\pi, 1 + \varepsilon_\pi)$ verschwindet die Funktion $\varsigma(\pi)$, damit gilt $r_2(\underline{s}, \pi) = r_2(\bar{s}, \pi) = 0$ und die Ungleichungen (2.16) sind mit Gleichheit erfüllt. Für $\pi \in (-\varepsilon_\pi, 1 + \varepsilon_\pi)$ ist $\varsigma(\pi) > 0$ und die Ungleichungen (2.16) sind genau dann erfüllt, wenn gilt

$$0 \leq \check{b}(\underline{s})\pi\sigma + \kappa_2(\mu_2 - \underline{s}) = \kappa_1(\mu_1 - \underline{s})\pi + \kappa_2(\mu_2 - \underline{s})(1 - \pi) =: g_1(\pi), \quad (2.17a)$$

$$0 \geq \check{b}(\bar{s})\pi\sigma + \kappa_2(\mu_2 - \bar{s}) = \kappa_1(\mu_1 - \bar{s})\pi + \kappa_2(\mu_2 - \bar{s})(1 - \pi) =: g_2(\pi), \quad (2.17b)$$

für alle $\pi \in (-\varepsilon_\pi, 1 + \varepsilon_\pi)$. Dabei wurde die Darstellung von $\check{b}(s)$ aus (2.9) verwendet. Die Funktionen g_1 und g_2 sind lineare Funktionen von π . Daher genügt es, wenn die Ungleichungen (2.17a)-(2.17b) in den Randpunkten $\pi = -\varepsilon_\pi$ und $\pi = 1 + \varepsilon_\pi$ gelten.

Die linke Ungleichung in (2.15) liefert

$$\frac{\varepsilon_\pi}{1 + \varepsilon_\pi} \cdot \frac{\mu_1 - \underline{s}}{\mu_2 - \underline{s}} \leq \frac{\kappa_2}{\kappa_1}.$$

Dies ist äquivalent zu

$$0 \leq \kappa_1(\mu_1 - \underline{s})(-\varepsilon_\pi) + \kappa_2(\mu_2 - \underline{s})(1 + \varepsilon_\pi) = g_1(-\varepsilon_\pi).$$

Um $g_1(1 + \varepsilon_\pi)$ zu zeigen, wird zusätzlich noch die Ungleichung (2.14) aus Annahme 2.1.4 verwendet. Wegen $\bar{s} > \mu_1 \geq \mu_2 > \underline{s}$ gilt

$$\frac{\kappa_2}{\kappa_1} \leq \frac{1 + \varepsilon_\pi}{\varepsilon_\pi} \cdot \frac{\mu_1 - \underline{s}}{\mu_2 - \underline{s}}$$

und

$$0 \leq \kappa_1(\mu_1 - \underline{s})(1 + \varepsilon_\pi) + \kappa_2(\mu_2 - \underline{s})(-\varepsilon_\pi) = g_1(1 + \varepsilon_\pi).$$

Damit ist (2.17a) gezeigt. Der Beweis von Ungleichung (2.17b) verläuft analog. □

Bemerkung 2.1.6. Die Bedingung (2.15) der Annahme 2.1.4 kann man nicht abschwächen.

Folgerung 2.1.7. *Wenn nur das Gleichgewichtsniveau $\mu(Y_t)$ oder nur die Steifigkeit $\kappa(Y_t)$ vom Faktorprozess Y getrieben wird, dann haben die Bedingungen (2.14)-(2.15) in der Annahme 2.1.4 folgende Gestalt:*

$$\text{für } \kappa(Y_t) \equiv \kappa: \quad \underline{s} < \mu_2 \leq \mu_1 < \bar{s};$$

$$\text{für } \mu(Y_t) \equiv \mu: \quad \underline{s} < \mu < \bar{s} \quad \text{und} \quad \frac{1}{c_\varepsilon} \leq \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \leq c_\varepsilon.$$

Beweis. Der Beweis folgt unmittelbar aus dem Einsetzen des Gleichgewichtsniveaus $\mu = \mu_1 = \mu_2$ bzw. der Steifigkeit $\kappa = \kappa_1 = \kappa_2$ in die Bedingungen (2.14)-(2.15) der Annahme 2.1.4. \square

Es sei bemerkt, dass für den Grenzfall $\varepsilon_\pi \rightarrow 0$ die Bedingung (2.15) immer erfüllt ist.

Nun lassen sich die oben eingeführten Randbedingungen für alle $\tau \in (0, T]$ und $q \in [\underline{q}, \bar{q}]$ in die HJB-Gleichung (2.7) mit dem Differentialoperator (2.10) einsetzen. Der Differentialoperator $(\mathcal{L} - \rho)\tilde{V}$ in (2.7) vereinfacht sich wie folgt (siehe Beziehungen (B.38) in Anhang B.3):

$$\bullet \quad s = \underline{s}, \bar{s} \quad , \quad \tilde{V}_{ss}(\tau, q, s, \pi) = \tilde{V}_{s\pi}(\tau, q, s, \pi) = 0 :$$

$$(\mathcal{L} - \rho)\tilde{V} = \mathcal{L}_1\tilde{V} + r_2 \frac{\partial}{\partial s}\tilde{V} - \rho\tilde{V}, \quad (\tau, q, \pi) \in (0, T] \times [\underline{q}, \bar{q}] \times [\underline{\pi}, \bar{\pi}],$$

$$\bullet \quad \pi = \underline{\pi}, \bar{\pi} \quad , \quad \tilde{V}_{\pi\pi}(\tau, q, s, \pi) = 0 :$$

$$(\mathcal{L} - \rho)\tilde{V} = r_1 \frac{\partial}{\partial \pi}\tilde{V} + \mathcal{L}_2\tilde{V} - \rho\tilde{V}, \quad (\tau, q, s) \in (0, T] \times [\underline{q}, \bar{q}] \times [\underline{s}, \bar{s}].$$

In Anhang B.3.1 werden die obigen Beziehungen für s und π mittels ihrer diskreten Analoga (B.49) approximiert.

Die unmittelbare Festlegung der Randbedingungen für q ist nicht erforderlich, da die SDE (2.2) in q degeneriert ist und bei $q = \underline{q}$ bzw. $q = \bar{q}$ die Reflexionsbedingungen (1.26) aus Abschnitt 1.1.2

$$\begin{aligned} -\mathfrak{h}(q) \cdot \tilde{w}(\tau, \underline{q}, s, \pi) &\geq 0, \quad \text{falls} \quad \tilde{w}(\tau, \underline{q}, s, \pi) \in \mathcal{U}(\underline{q}), \\ -\mathfrak{h}(q) \cdot \tilde{w}(\tau, \bar{q}, s, \pi) &\leq 0, \quad \text{falls} \quad \tilde{w}(\tau, \bar{q}, s, \pi) \in \mathcal{U}(\bar{q}), \end{aligned} \quad (2.18)$$

für die Strategie $\tilde{w}(\tau, q, s, \pi) \in \mathcal{U}(q)$ erfüllt sind.

2.1.3 Semi-Lagrange-Approximationsschema

Die Gleichung (2.7) ist eine parabolischen PDE, welche die Elliptizitätsbedingung für den Diffusionsteil nicht erfüllt, was bei ihrer numerischen Lösung Schwierigkeiten verursacht. Für diese PDEs existiert jedoch ein effizientes numerisches Approximationsverfahren, das *Semi-Lagrange-Methode (SLM)* genannt wird (siehe z.B. Chen u. Forsyth [11], [12], [13], [14], d’Haluin, Forsyth u. Labahn [20]). Die nachfolgende Beschreibung dieses Verfahrens orientiert sich an die Darstellung in Chen u. Forsyth [11].

Die Grundidee der SLM besteht darin, die HJB-Gleichung (2.7) längs einer sogenannten *Semi-Lagrange-Trajektorie (SLT)* zu integrieren, um den Konvektionsterm mit der Ableitung erster Ordnung nach q zu eliminieren. Die Diskretisierung der entstehenden Integrale mit Hilfe von Quadraturformeln wie der Rechteck- oder Trapezregel führt auf entsprechende Varianten des Semi-Lagrange-Approximationsschemas. Die in der integrierten HJB-Gleichung verbleibenden Terme mit den Ableitungen nach s und π bilden den Differentialoperator \mathcal{L} aus (2.6) bzw. (2.10),

welcher im Diffusionsteil elliptisch ist. Für die sich so ergebende PDE stehen klassische numerische Lösungsverfahren zur Verfügung.

Seien nun die „nicht-gesteuerten“ Variablen $s = s^*$ und $\pi = \pi^*$ fixiert (für diese Variablen ist die SDE (2.2) nicht degeneriert). Dann wird die Dynamik des Füllstandes $\tilde{Q}_\tau^{\tilde{u}} := Q_{T-\tau}^u$ aus der entsprechenden ODE in (2.2) wie folgt definiert:

$$\frac{d\tilde{Q}_\tau^{\tilde{u}}}{d\tau} = -\frac{dQ_t^u}{dt} = \mathfrak{h}(\tilde{Q}_\tau^{\tilde{u}}) \cdot \tilde{u}_\tau, \quad \tilde{Q}_0^{\tilde{u}} = \tilde{q}_0. \quad (2.19)$$

Die Lösung $\tilde{Q}_\tau^{\tilde{u}}$ der ODE (2.19) heißt Semi-Lagrange-Trajektorie (SLT) und hängt von der Steuerung $\tilde{u}_\tau := u_{T-\tau}$ ab. Weiterhin wird für fixierte $s = s^*$ und $\pi = \pi^*$ das Differential von \tilde{V} an der Stelle (τ, q, s^*, π^*) gebildet:

$$d\tilde{V} = \tilde{V}(\tau + d\tau, \tilde{Q}_{\tau+d\tau}^{\tilde{u}}, s^*, \pi^*) - \tilde{V}(\tau, \tilde{Q}_\tau^{\tilde{u}}, s^*, \pi^*) = \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{V} d\tau + \frac{\partial}{\partial q} \tilde{V} d\tilde{Q}_\tau^{\tilde{u}}. \quad (2.20)$$

Nach dem Einsetzen von (2.19) in (2.20) gilt

$$d\tilde{V} = \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{V} d\tau + \mathfrak{h}(\tilde{Q}_\tau^{\tilde{u}}) \cdot \tilde{u}_\tau \frac{\partial}{\partial q} \tilde{V} d\tau.$$

Substituiert man den Ausdruck

$$\mathfrak{h}(\tilde{Q}_\tau^{\tilde{u}}) \cdot \tilde{u}_\tau \frac{\partial}{\partial q} \tilde{V} = \frac{d\tilde{V}}{d\tau} - \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{V}$$

in die HJB-Gleichung (2.7) an der Stelle $(\tau, x) = (\tau, q, s^*, \pi^*) \in (0, T] \times \tilde{\mathcal{X}}$, so ergibt sich:

$$(\mathcal{L} - \rho)\tilde{V}(\tau, x) + \sup_{y \in \mathcal{U}(q)} \left(-\frac{d\tilde{V}(\tau, x)}{d\tau} + F(x, y) \right) = 0. \quad (2.21)$$

Um auf Basis der SLM ein Differenzenschema entwickeln zu können, werden die ODE (2.19) für den Füllstand und die HJB-Gleichung (2.21) auf dem eingeführten Gitter $\bar{\mathcal{G}}$ diskretisiert. Bezeichne

$$\tilde{Q}^{\tilde{w}}(\tau) := \tilde{Q}^{\tilde{w}}(\tau; q_i, s_j, \pi_k, \tau_{n+1}, \tilde{w}_{i,j,k}(\tau)), \quad \tau \in [\tau_n, \tau_{n+1}], \quad (2.22)$$

die sich zum Zeitpunkt τ im Gitterpunkt (q_i, s_j, π_k) befindende SLT zur ODE (2.19), wobei die Strategie als

$$\tilde{w}_{i,j,k}(\tau) := \tilde{w}(\tau, q_i, s_j, \pi_k) \quad (2.23)$$

gewählt wird. Hierbei ist die SLT (2.22) von der Auswahl der Strategie (2.23) abhängig, welche bei fixierten Werten q_i, s_j und π_k eine deterministische Funktion der Restlaufzeit τ ist. Daher wird hier die Notation $\tilde{Q}^{\tilde{w}}$ verwendet. Ausgehend vom Endwert der SLT $\tilde{Q}^{\tilde{w}}(\tau_{n+1}) = q_i$ zum Zeitpunkt $\tau = \tau_{n+1}$ ergibt sich der Anfangswert zur Zeit $\tau = \tau_n$

$$\tilde{Q}^{\tilde{w}}(\tau_n) := \tilde{Q}^{\tilde{w}}(\tau_n; q_i, s_j, \pi_k, \tau_{n+1}, \tilde{w}_{i,j,k}(\tau_n)) \quad (2.24)$$

als Lösung folgenden Endwertproblems für die ODE (2.19):

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{Q}^{\tilde{w}}}{d\tau}(\tau) &= \mathfrak{h}\left(\tilde{Q}^{\tilde{w}}(\tau)\right) \cdot \tilde{w}_{i,j,k}(\tau), \\ \tilde{Q}^{\tilde{w}}(\tau_{n+1}) &= q_i.\end{aligned}\tag{2.25}$$

In Integralform lautet (2.25):

$$\tilde{Q}^{\tilde{w}}(\tau_n) = q_i - \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \mathfrak{h}\left(\tilde{Q}^{\tilde{w}}(\tau)\right) \cdot \tilde{w}_{i,j,k}(\tau) d\tau.\tag{2.26}$$

Nun integriert man beide Seiten der HJB-Gleichung (2.21) von τ_n bis τ_{n+1} entlang der Trajektorie (2.22), wobei die Gitterpunkte s_j und π_k fixiert sind und die Steuerung gemäß (2.23) gewählt wird:

$$\begin{aligned}\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} (\mathcal{L} - \rho) \tilde{V}(\tau, \tilde{Q}^{\tilde{w}}(\tau), s_j, \pi_k) d\tau + \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} \sup_{\tilde{w}_{i,j,k}(\tau) \in U(\tilde{Q}^{\tilde{w}}(\tau))} \left(-\frac{d\tilde{V}(\tau, \tilde{Q}^{\tilde{w}}(\tau), s_j, \pi_k)}{d\tau} \right. \\ \left. + F(\tilde{Q}^{\tilde{w}}(\tau), s_j, \tilde{w}_{i,j,k}(\tau)) \right) d\tau = 0,\end{aligned}$$

wobei $U(\tilde{Q}^{\tilde{w}}(\tau))$ die abgeschlossene Menge der zulässigen Steuerungswerte ist, die von der Trajektorie (2.22) abhängt.

Um aus obiger Gleichung in Integralform ein Differenzenschema zu konstruieren, wird angenommen, dass das Supremum und das Integral vertauscht werden können (siehe Chen u. Forsyth [11, Abschnitt 3, Bemerkung 3.1]). Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}\tilde{V}(\tau_{n+1}, q_i, s_j, \pi_k) &= \sup_{\tilde{w}_{i,j,k}(\tau) \in U(\tilde{Q}^{\tilde{w}}(\tau))} \left(\tilde{V}(\tau_n, \tilde{Q}^{\tilde{w}}(\tau_n), s_j, \pi_k) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} (\mathcal{L} - \rho) \tilde{V}(\tau, \tilde{Q}^{\tilde{w}}(\tau), s_j, \pi_k) d\tau + \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} F(\tilde{Q}^{\tilde{w}}(\tau), s_j, \tilde{w}_{i,j,k}(\tau)) d\tau \right).\end{aligned}\tag{2.27}$$

Zur Entwicklung eines Differenzenschemas aus Gleichung (2.27) werden die beiden Integrale sowie das Integral in (2.26) mit Hilfe einer Quadraturformel approximiert. Dabei wird angenommen, dass die Steuerung $\tilde{w}_{i,j,k}(\tau)$ auf dem Intervall $(\tau_n, \tau_{n+1}]$ konstant und gleich dem Wert an der Stelle τ_{n+1} ist, d.h. $\tilde{w}_{i,j,k}(\tau) = \tilde{w}_{i,j,k}(\tau_{n+1}) =: \tilde{w}_{i,j,k}^{n+1}$. In dieser Arbeit wird die Rechteckregel an der Stelle τ_{n+1} verwendet. Dies führt auf ein implizites Differenzenschema.

Bemerkung 2.1.8. Die Integrale in (2.26)-(2.27) kann man auch mittels der Trapezregel approximieren, was zu einem Crank-Nicolson-Approximationsschema führt (siehe Chen u. Forsyth [12, Abschnitt 3.2]). Außerdem lässt sich das implizite Approximationsschema alternativ durch die Betrachtung eines zeitdiskreten Kontrollsystems mit konstanter Steuerung und konstantem Füllstand im Intervall $(\tau_n, \tau_{n+1}]$ aufstellen (siehe Chen u. Forsyth [11, Anhang B]).

Für die auf $(\tau_n, \tau_{n+1}]$ konstante Steuerung liefert die Rechteckregel für das Integral in (2.26) die Approximation

$$\tilde{Q}_{i(j,k,n+1)}^{\tilde{w},n} = q_i - \Delta_\tau h_i \cdot \tilde{w}_{i,j,k}^{n+1}, \quad \forall i = 0, \dots, N_q, \quad (2.28)$$

wobei $h_i := h(q_i) = h(\tilde{Q}^{\tilde{w}}(\tau_{n+1}))$ und $\tilde{Q}_{i(j,k,n+1)}^{\tilde{w},n}$ eine Approximation für den Startpunkt (2.24) der SLT (2.25) ist, die jedoch nicht unbedingt mit den Gitterpunkten aus $\bar{\mathcal{G}}_q$ übereinstimmt. Um zu sichern, dass die in (2.28) erhaltene Approximation $\tilde{Q}_{i(j,k,n+1)}^{\tilde{w},n}$ im zulässigen Intervall $[q, \bar{q}]$ liegt, ist bei der Wahl der Strategie $\tilde{w}_{i,j,k}^{n+1}$ zu beachten, dass

$$\tilde{w}_{i,j,k}^{n+1} \in U^{n+1}(q_i) = \left\{ \tilde{w}_{i,j,k}^{n+1} \in U(q_i) \mid \tilde{Q}_{i(j,k,n+1)}^{\tilde{w},n} \in [q, \bar{q}] \right\}, \quad \forall i = 0, \dots, N_q, \quad (2.29)$$

gilt. Die Menge $U^{n+1}(q_i)$ ist die Menge der zulässigen Steuerungswerte zur Zeit τ_{n+1} für den Endwert q_i , für die die Approximation (2.28) für den Startpunkt der SLT zulässig ist.

Weiterhin bezeichnet man mit $\tilde{V}_{i(j,k,n+1),j,k}^n := \tilde{V}(\tau_n, \tilde{Q}_{i(j,k,n+1)}^{\tilde{w},n}, s_j, \pi_k)$ die Approximation für die Wertfunktion $\tilde{V}(\tau_n, \tilde{Q}^{\tilde{w}}(\tau_n), s_j, \pi_k)$ aus (2.27). Werden in (2.27) die Integrale mit der Rechteckregel an der Stelle τ_{n+1} und der Differentialoperator \mathcal{L} mit dem diskretisierten Differenzenoperator Λ (siehe Ausdrücke (B.62), (B.64) in Anhang B.3.2) approximiert, so ergibt sich

$$\tilde{V}_{i,j,k}^{n+1} = \max_{\tilde{w}_{i,j,k}^{n+1} \in U^{n+1}(q_i)} \left\{ \tilde{V}_{i(j,k,n+1),j,k}^n + \Delta_\tau F(q_i, s_j, \tilde{w}_{i,j,k}^{n+1}) \right\} + \Delta_\tau (\Lambda - \rho) \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1}$$

oder nach der Umformung

$$(\Lambda - c) \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1} = - \max_{\tilde{w}_{i,j,k}^{n+1} \in U^{n+1}(q_i)} \left\{ \frac{1}{\Delta_\tau} \tilde{V}_{i(j,k,n+1),j,k}^n + F(q_i, s_j, \tilde{w}_{i,j,k}^{n+1}) \right\} \quad (2.30)$$

mit $c := \rho + \frac{1}{\Delta_\tau} > 0$.

Es sei erwähnt, dass die Randbedingungen in s und π für die Differenzenaufgabe (2.30) bei fixiertem i durch die Differenzengleichungen (B.49) in Anhang B.3.1 beschrieben werden.

Aus (2.30) folgt unmittelbar, dass die optimale Strategie als Lösung folgendes Maximierungsproblems definiert wird:

$$\tilde{w}_{i,j,k}^{*n+1} = \arg \max_{y \in U^{n+1}(q_i)} \left\{ \frac{1}{\Delta_\tau} \tilde{V}_{i(j,k,n+1),j,k}^n + F(q_i, s_j, y) \right\}. \quad (2.31)$$

Das Maximierungsproblem (2.31) ist die diskretisierte Version des nichtlinearen punktweisen Optimierungsproblems (1.90), dessen Lösung nach der in Abschnitt 1.2.3 erhaltenen Entscheidungsregel (1.92) gesucht wird.

Die Gleichungen (2.28), (2.30) und (2.31) bestimmen ein implizites Semi-Lagrange-Approximationsschema (ISLAS) für die HJB-Gleichung (2.7), das in vollständiger Form wie folgt

dargestellt wird:

$$\begin{aligned}
 (\Lambda - c)\tilde{V}_{i,j,k}^{n+1} &= - \max_{y \in U^{n+1}(q_i)} \left\{ \frac{1}{\Delta\tau} \tilde{V}_{i(j,k,n+1),j,k}^n + F(q_i, s_j, y) \right\}, \\
 \tilde{w}_{i,j,k}^{n+1} &= \arg \max_{y \in U^{n+1}(q_i)} \left\{ \frac{1}{\Delta\tau} \tilde{V}_{i(j,k,n+1),j,k}^n + F(q_i, s_j, y) \right\}, \\
 U^{n+1}(q_i) &= \left\{ y \in U(q_i) \mid \tilde{Q}_{i(j,k,n+1)}^{y,n} \in [\underline{q}, \bar{q}] \right\}, \\
 \tilde{Q}_{i(j,k,n+1)}^{\tilde{w},n} &= q_i - \Delta\tau \mathfrak{h}_i \cdot \tilde{w}_{i,j,k}^{n+1}, \\
 \tilde{V}_{i,j,k}^0 &= \Phi(q_i, s_j).
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

In der dritten Beziehung des ISLAS (2.32) für die Menge der zulässigen Steuerungswerte ist die SLT von der Auswahl des Steuerungswertes $y \in U(q_i)$ abhängig. Von daher wird dort für die diskrete SLT die Schreibweise $\tilde{Q}_{i(j,k,n+1)}^{y,n}$ verwendet.

Weil die Approximation (2.28) für den Startpunkt der SLT des Füllstandes in der Regel nicht mit den Gitterpunkten q_i aus $\bar{\mathcal{G}}_q$ übereinstimmt, muss man die Wertfunktion $\tilde{V}(\tau_n, q, s_j, \pi_k)$ an der Stelle $q = \tilde{Q}_{i(j,k,n+1)}^{\tilde{w},n}$ durch Funktionswerte $\tilde{V}(\tau_n, q_i, s_j, \pi_k) := \tilde{V}_{i,j,k}^n$ in den Gitterpunkten von $\bar{\mathcal{G}}$ interpolieren. Es zeigt sich, dass bereits eine lineare Interpolation ausreichend ist, da sie nach Chen u. Forsyth [11], [12], d'Halluin, Forsyth u. Labahn [20] erlaubt, ein monotones Differenzenschema zu konstruieren. Hierbei ist für jedes $i = 0, \dots, N_q$ die Lage des Punktes

$$\tilde{Q}_{i(j,k,n+1)}^{\tilde{w},n} = q_i - \Delta\tau \mathfrak{h}_i \cdot \tilde{w}_{i,j,k}^{n+1}$$

im Gitter $\bar{\mathcal{G}}_q$ von Interesse. Der Einfachheit halber wird gefordert, dass der Startpunkt $\tilde{Q}_{i(j,k,n+1)}^{\tilde{w},n}$ der Trajektorie des Füllstandes immer zwischen den zu q_i benachbarten Gitterpunkten $q_{i-1} = q_i - \Delta_q$ und $q_{i+1} = q_i + \Delta_q$ liegt und somit folgende Ungleichungen gelten:

$$\begin{aligned}
 \underline{q} := q_0 &\leq q_0 - \Delta\tau \mathfrak{h}_0 \cdot \tilde{w}_{0,j,k}^{n+1} \leq q_1 := \underline{q} + \Delta_q, & \tilde{w}_{0,j,k}^{n+1} &\leq 0, \\
 q_{i-1} &\leq q_i - \Delta\tau \mathfrak{h}_i \cdot \tilde{w}_{i,j,k}^{n+1} \leq q_{i+1}, & i &= 1, \dots, N_q - 1, \\
 \bar{q} - \Delta_q := q_{N_q-1} &\leq q_{N_q} - \Delta\tau \mathfrak{h}_{N_q} \cdot \tilde{w}_{N_q,j,k}^{n+1} \leq q_{N_q} := \bar{q}, & \tilde{w}_{N_q,j,k}^{n+1} &\geq 0,
 \end{aligned}$$

wobei die Ungleichungen

$$\tilde{w}_{0,j,k}^{n+1} := \tilde{w}(\tau_{n+1}, q_0, s_j, \pi_k) \leq 0, \quad q_0 = \underline{q},$$

und

$$\tilde{w}_{N_q,j,k}^{n+1} := \tilde{w}(\tau_{n+1}, q_{N_q}, s_j, \pi_k) \geq 0, \quad q_{N_q} = \bar{q},$$

die diskreten Analoga für die Reflexionsbedingungen (2.18) darstellen. Dabei sind die obigen Gleichungen unter der Bedingung $\Delta_q \geq \Delta\tau \mathfrak{h}_i \cdot |\tilde{w}_{i,j,k}^{n+1}|$ für alle \mathfrak{h}_i und $\tilde{w}_{i,j,k}^{n+1} \in U^{n+1}(q_i)$ erfüllt. Unter Berücksichtigung der Menge der zulässigen Steuerungswerte (1.23) ist es hierzu hinreichend zu fordern:

$$\Delta_q \geq \Delta\tau \max_{q \in [\underline{q}, \bar{q}]} \left\{ \mathfrak{h}(q) \cdot \max(|\underline{u}(q)|, \bar{u}(q)) \right\}. \tag{2.33}$$

Die Beziehung (2.33) heißt auch *Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung (CFL-Bedingung)* [18] und wird häufig in der Numerik parabolischer partieller Differentialgleichungen verwendet. Für das gestellte ISLAS (2.32), in dem der Füllstand explizit und der Preis zusammen mit der Filterwahrscheinlichkeit implizit behandelt werden, sichert die CFL-Bedingung (2.33), dass das entwickelte Differenzenschema stabil ist (siehe Abschnitt 2.1.4).

Unter der CFL-Bedingung (2.33) ist die lineare Interpolation für die Wertfunktion

$$\tilde{V}(\tau_n, \tilde{Q}_{i(j,k,n+1)}^{y,n}, s_j, \pi_k)$$

an der Stelle $\tilde{Q}_{i(j,k,n+1)}^{y,n}$ mit $y = \tilde{w}_{i,j,k}^{n+1}$ folgendermaßen darstellbar:

$$\tilde{V}_{i(j,k,n+1),j,k}^n = \begin{cases} \tilde{V}_{i,j,k}^n - \Delta\tau \mathfrak{h}_i \cdot y \frac{\tilde{V}_{i,j,k}^n - \tilde{V}_{i-1,j,k}^n}{\Delta_q}, & y \geq 0, \quad i = 1, \dots, N_q, \\ \tilde{V}_{i,j,k}^n - \Delta\tau \mathfrak{h}_i \cdot y \frac{\tilde{V}_{i+1,j,k}^n - \tilde{V}_{i,j,k}^n}{\Delta_q}, & y \leq 0, \quad i = 0, \dots, N_q - 1. \end{cases} \quad (2.34)$$

In den bezüglich q inneren Gitterpunkten ergibt sich die quivalente Darstellung

$$\tilde{V}_{i(j,k,n+1),j,k}^n = \tilde{V}_{i,j,k}^n - \Delta\tau \mathfrak{h}_i \cdot \left(\frac{(y-|y|)}{2} \frac{(\tilde{V}_{i+1,j,k}^n - \tilde{V}_{i,j,k}^n)}{\Delta_q} + \frac{(y+|y|)}{2} \frac{(\tilde{V}_{i,j,k}^n - \tilde{V}_{i-1,j,k}^n)}{\Delta_q} \right) \quad (2.35)$$

für alle $n = 0, \dots, N_\tau - 1$, $i = 1, \dots, N_q - 1$, $j = 0, \dots, N_s$ und $k = 0, \dots, N_\pi$.

Da die Wertfunktion $\tilde{V}_{i,j,k}^n$ zum Zeitpunkt τ_n bereits berechnet ist, sind $\frac{\tilde{V}_{i,j,k}^n - \tilde{V}_{i-1,j,k}^n}{\Delta_q}$ und $\frac{\tilde{V}_{i+1,j,k}^n - \tilde{V}_{i,j,k}^n}{\Delta_q}$ die bekannten Rückwärts- bzw. Vorwrtsdifferenzenquotienten, mittels denen die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial q} \tilde{V}$ in Abhängigkeit vom Vorzeichen der Strategie \tilde{w} in der HJB-Gleichung (2.7) approximiert wird.

Schließlich wird $\frac{1}{\Delta\tau} \tilde{V}_{i(j,k,n+1),j,k}^n$ in Hinblick auf die lineare Interpolation (2.34)-(2.35) für alle $n = 0, \dots, N_\tau - 1$, $j = 0, \dots, N_s$ und $k = 0, \dots, N_\pi$ wie folgt umgeschrieben:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta\tau} \tilde{V}_{0(j,k,n+1),j,k}^n &= C_{0,j,k}^{(q),n} \tilde{V}_{0,j,k}^n + B_{0,j,k}^{(q),n} \tilde{V}_{1,j,k}^n, \quad i = 0, \\ \frac{1}{\Delta\tau} \tilde{V}_{i(j,k,n+1),j,k}^n &= A_{i,j,k}^{(q),n} \tilde{V}_{i-1,j,k}^n + C_{i,j,k}^{(q),n} \tilde{V}_{i,j,k}^n + B_{i,j,k}^{(q),n} \tilde{V}_{i+1,j,k}^n, \quad i = 1, \dots, N_q - 1, \\ \frac{1}{\Delta\tau} \tilde{V}_{N_q(j,k,n+1),j,k}^n &= A_{N_q,j,k}^{(q),n} \tilde{V}_{N_q-1,j,k}^n + C_{N_q,j,k}^{(q),n} \tilde{V}_{N_q,j,k}^n, \quad i = N_q, \end{aligned} \quad (2.36)$$

mit den von $y = \tilde{w}_{i,j,k}^{n+1}$ abhängigen nichtnegativen Koeffizienten

$$\begin{aligned} A_{i,j,k}^{(q),n} &= \mathfrak{h}_i \cdot \frac{y+|y|}{2\Delta_q} \geq 0, & A_{N_q,j,k}^{(q),n} &= \mathfrak{h}_{N_q} \cdot \frac{y}{\Delta_q} \geq 0, \\ C_{0,j,k}^{(q),n} &= \frac{1}{\Delta\tau} + \mathfrak{h}_0 \cdot \frac{y}{\Delta_q} \geq 0, & C_{i,j,k}^{(q),n} &= \frac{1}{\Delta\tau} - \mathfrak{h}_i \cdot \frac{|y|}{\Delta_q} \geq 0, & C_{N_q,j,k}^{(q),n} &= \frac{1}{\Delta\tau} - \mathfrak{h}_{N_q} \cdot \frac{y}{\Delta_q} \geq 0, \\ B_{0,j,k}^{(q),n} &= -\mathfrak{h}_0 \cdot \frac{y}{\Delta_q} \geq 0, & B_{i,j,k}^{(q),n} &= -\mathfrak{h}_i \cdot \frac{y-|y|}{2\Delta_q} \geq 0. \end{aligned}$$

Mit $F_{i,j,k}^n := F(q_i, s_j, \tilde{w}_{i,j,k}^{n+1})$ wird der von der Strategie $\tilde{w}_{i,j,k}^{n+1}$ abhängige Wert der Gewinnfunktion bezeichnet. Seien die Indizes n und i fixiert und sei die für τ_{n+1} und q_i in (2.32) zusammen mit den Ausdrücken (2.33)-(2.35) berechnete optimale Strategie $\tilde{w}_{i,j,k}^{n+1}$ für alle j und

k bekannt. Dies impliziert, dass die rechte Seite der Differenzengleichung in (2.32) bei fixierten τ_{n+1} und q_i , sowie für alle s_j und π_k auch bekannt ist, u.z.

$$-\overline{H}_{i,j,k}^n := - \max_{y \in U^{n+1}(q_i)} \left\{ \frac{1}{\Delta_\tau} \tilde{V}_{i(j,k,n+1),j,k}^n + F(q_i, s_j, y) \right\}. \quad (2.37)$$

Für die inneren Gitterpunkte q_i , $i = 1, \dots, N_q - 1$, kann die Beziehung (2.37) in Hinblick auf (2.33)-(2.36) für fixierte n , j und k als 3-Punkt-Differenzenschema formuliert werden:

$$-\overline{H}_{i,j,k}^n := - \max_{y \in U^{n+1}(q_i)} \left\{ A_{i,j,k}^{(q),n} \tilde{V}_{i-1,j,k}^n + C_{i,j,k}^{(q),n} \tilde{V}_{i,j,k}^n + B_{i,j,k}^{(q),n} \tilde{V}_{i+1,j,k}^n + F_{i,j,k}^n \right\}. \quad (2.38)$$

Zusammen mit den in Anhang B.3.1 erhaltenen diskreten Randbedingungen (B.49) ist die Differenzengleichung in (2.32) mit bekannter rechter Seite $-\overline{H}_{i,j,k}^n$ für fixierte n und i mit dem in Anhang B.3.2 aufgestellten Differenzenschema (B.64) identisch und lässt sich als folgendes lineares Gleichungssystem darstellen:

$$\mathcal{A}_i \tilde{\mathcal{V}}_i^{n+1} = \mathcal{H}_i^n \quad n = 0, \dots, N_\tau - 1, \quad i = 0, \dots, N_q. \quad (2.39)$$

Hier sind $\tilde{\mathcal{V}} = (\tilde{\mathbf{V}}_0^\top, \dots, \tilde{\mathbf{V}}_{N_\pi}^\top)^\top$ und $\mathcal{H} = (\mathbf{H}_0^\top, \dots, \mathbf{H}_{N_\pi}^\top)^\top$ der \tilde{N} -dimensionale Lösungsvektor bzw. der Vektor der rechten Seite mit $\tilde{N} = (N_s + 1) \cdot (N_\pi + 1)$, dessen Komponenten die folgenden $(N_s + 1)$ -dimensionalen Vektoren sind:

$$\tilde{\mathbf{V}}_k = (\tilde{V}_{0,k}, \dots, \tilde{V}_{N_s,k})^\top \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{H}_k = (\overline{H}_{0,k}, \dots, \overline{H}_{N_s,k})^\top, \quad k = 0, \dots, N_\pi.$$

Die Koeffizientenmatrizen \mathcal{A}_i sind für alle $i = 0, \dots, N_q$ identische tridiagonale $(\tilde{N} \times \tilde{N})$ -Blockmatrizen der Form

$$\mathcal{A}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_0 & -\mathbf{B}_0 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_1 & \mathbf{C}_1 & -\mathbf{B}_1 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{A}_2 & \mathbf{C}_2 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{C}_{N_\pi-2} & -\mathbf{B}_{N_\pi-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -\mathbf{A}_{N_\pi-1} & \mathbf{C}_{N_\pi-1} & -\mathbf{B}_{N_\pi-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{A}_{N_\pi} & \mathbf{C}_{N_\pi} \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

wobei $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{(N_s+1) \times (N_s+1)}$ die quadratische $((N_s + 1) \times (N_s + 1))$ -Nullmatrix bezeichnet. Die Struktur der $((N_s + 1) \times (N_s + 1))$ -Matrizen \mathbf{A}_k , \mathbf{B}_k und \mathbf{C}_k , sowie die Aufstellung des Differenzenschemas sind in Anhang B.3.2 gegeben. Aufgrund besserer Lesbarkeit entfallen in obigen Bezeichnungen die als fix betrachteten Indizes n und i .

Gemäß Lemma B.3.5 ist die Blockmatrix \mathcal{A}_i in (2.40) für alle $i = 0, \dots, N_q$ eine M-Matrix und somit invertierbar, wenn die Nichtnegativitätsbedingungen (B.70) aus Anhang B.3.2 für die Koeffizienten (2.9), (2.12) und $c = \rho + \frac{1}{\Delta_\tau}$ erfüllt sind. Unter (B.70) besitzt das Gleichungssystem (2.39) eine eindeutige Lösung $\tilde{\mathcal{V}}_i^{(n+1)} = (\mathcal{A}_i)^{-1} \mathcal{H}_i^n$, die sich z.B. mittels des Gaußschen

Blockeliminationsverfahrens lösen lässt (siehe Samarskii u. Nikolaev [58, Kapitel 2, Abschnitt 2.4.2])).

Sei die optimale Strategie $\tilde{w}_{i,j,k}^{n+1}$ für alle n , i , j und k gegeben. Dann lässt sich das ISLAS (2.32) unter der Berücksichtigung des linearen Gleichungssystems (2.39) mit der Blockmatrix (2.40) in Matrixform wie folgt darstellen:

$$\mathcal{A}\tilde{\mathcal{V}}^{n+1} = \mathcal{B}^n\tilde{\mathcal{V}}^n + \mathcal{F}^n, \quad n = 0, \dots, N_\tau - 1, \quad (2.41)$$

mit der diagonalen $(\bar{N} \times \bar{N})$ -Blockmatrix, $\bar{N} = (N_q + 1) \cdot (N_s + 1) \cdot (N_\pi + 1)$,

$$\mathcal{A} = \text{diag}[\mathcal{A}_0, \dots, \mathcal{A}_i, \dots, \mathcal{A}_{N_q}],$$

deren $(\tilde{N} \times \tilde{N})$ -Blockmatrizen \mathcal{A}_i für jedes i die Gestalt (2.40) haben, der tridiagonalen $(\bar{N} \times \bar{N})$ -Blockmatrix

$$\mathcal{B}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_0^{(q),n} & \mathbf{B}_0^{(q),n} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_1^{(q),n} & \mathbf{C}_1^{(q),n} & \mathbf{B}_1^{(q),n} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^{(q),n} & \mathbf{C}_2^{(q),n} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{C}_{N_q-2}^{(q),n} & \mathbf{B}_{N_q-2}^{(q),n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{A}_{N_q-1}^{(q),n} & \mathbf{C}_{N_q-1}^{(q),n} & \mathbf{B}_{N_q-1}^{(q),n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{N_q}^{(q),n} & \mathbf{C}_{N_q}^{(q),n} \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

deren Blöcke die diagonalen $(\tilde{N} \times \tilde{N})$ -Matrizen

$$\mathbf{A}_i^{(q),n} = \text{diag}[\mathbf{A}_{i,0,0}^{(q),n}, \dots, \mathbf{A}_{i,N_s,0}^{(q),n}, \dots, \mathbf{A}_{i,0,N_\pi}^{(q),n}, \dots, \mathbf{A}_{i,N_s,N_\pi}^{(q),n}], \quad i = 1, \dots, N_q,$$

$$\mathbf{C}_i^{(q),n} = \text{diag}[\mathbf{C}_{i,0,0}^{(q),n}, \dots, \mathbf{C}_{i,N_s,0}^{(q),n}, \dots, \mathbf{C}_{i,0,N_\pi}^{(q),n}, \dots, \mathbf{C}_{i,N_s,N_\pi}^{(q),n}], \quad i = 0, \dots, N_q,$$

$$\mathbf{B}_i^{(q),n} = \text{diag}[\mathbf{B}_{i,0,0}^{(q),n}, \dots, \mathbf{B}_{i,N_s,0}^{(q),n}, \dots, \mathbf{B}_{i,0,N_\pi}^{(q),n}, \dots, \mathbf{B}_{i,N_s,N_\pi}^{(q),n}], \quad i = 0, \dots, N_q - 1,$$

sind, dem \bar{N} -dimensionalen Lösungsvektor $\tilde{\mathcal{V}}^{n+1}$ und dem Vektor der rechten Seite \mathcal{F}^n .

Wenn die Modell- und Diskretisierungsparameter so gewählt werden, dass die Nichtnegativitätsbedingungen (B.70) aus Anhang B.3.2 für die Koeffizienten des Differenzenschemas (2.32) und $c = \rho + \frac{1}{\Delta_\tau}$ gelten, erhält man nach Lemma B.3.5 für die dem Differenzenoperator Λ zugehörige Blockmatrix \mathcal{A} aus (2.41) folgende Abschätzung:

$$\|\mathcal{A}^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{c} = \frac{1}{\rho + \frac{1}{\Delta_\tau}}. \quad (2.43)$$

Darüber hinaus liefern die Nichtnegativitätsbedingungen für die Koeffizienten der linearen Interpolation (2.36)

$$\|\mathcal{B}^n\|_\infty = \frac{1}{\Delta_\tau} > 0. \quad (2.44)$$

Die beiden Abschätzungen (2.43) und (2.44) werden für den Beweis der Stabilität des erhaltenen Differenzenschemas (2.32) in Anhang C.3 benötigt.

2.1.4 Eigenschaften des Differenzenschemas

Um die Frage über die Qualität des entwickelten Differenzenschemas (2.32) zu beantworten, d.h. dessen Güte für die Approximation der Lösung der HJB-Gleichung (2.7), muss man die Eigenschaften Stabilität, Konsistenz und Monotonie des Schemas nachweisen.

Unter der Stabilität des Differenzenschemas versteht man die kontinuierliche Abhängigkeit seiner Lösung von seiner rechten Seite. Die Konsistenz beschreibt, wie gut das erhaltene Differenzenschema die gestellte stetige Randwertaufgabe approximiert. Die Eigenschaft der Monotonie eines Differenzenschemas besagt, dass das Schema zu nichtnegativen Anfangswerten eine nichtnegative Lösung erzeugt. Die Differenzenschemata, welche die genannten Eigenschaften nachweisen, heißen konvergente Differenzenschemata (im Detail siehe Duffy [21] und Samarskii [57]).

Die CFL-Bedingung (2.33) zusammen mit der nach (2.36) berechneten linearen Interpolation $\frac{1}{\Delta\tau} \tilde{V}_{i(j,k,n+1),j,k}^n$ erlauben das ISLAS (2.32) nach Chen u. Forsyth [12, Abschnitt 3.3] in folgender kompakter Form zu schreiben:

$$\mathcal{D}_{i,j,k}^{n+1}(\Delta\tau, \Delta q, \Delta s, \Delta\pi, \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1}, \tilde{V}_{i,j+1,k}^{n+1}, \tilde{V}_{i,j-1,k}^{n+1}, \{\tilde{V}_{i,j,l}^{n+1}\}_{l \neq k}, \{\tilde{V}_{i,j,k}^n\}) := (\Lambda - c) \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1} + \max_{y \in \mathbb{U}^{n+1}(q_i)} \left\{ A_{i,j,k}^{(q),n} \tilde{V}_{i-1,j,k}^n + C_{i,j,k}^{(q),n} \tilde{V}_{i,j,k}^n + B_{i,j,k}^{(q),n} \tilde{V}_{i+1,j,k}^n + F_{i,j,k}^n \right\} = 0, \quad (2.45)$$

wobei $\{\tilde{V}_{i,j,l}^{n+1}\}_{l \neq k}$ und $\{\tilde{V}_{i,j,k}^n\}$ die Mengen der Funktionswerte von $\tilde{V}_{i,j,l}^{n+1}$, $j = 0, \dots, N_s$, $l \neq k$, $l = 0, \dots, N_\pi$, bzw. von $\tilde{V}_{i,j,k}^n$ sind und die Koeffizienten $A_{i,j,k}^{(q),n}$, $B_{i,j,k}^{(q),n}$, $C_{i,j,k}^{(q),n}$ und die Funktionen $F_{i,j,k}^n$ von der Steuerung y abhängen (siehe (2.36)).

Dabei bezeichnet $\mathcal{D}_{i,j,k}^{n+1}$ in (2.45) das ISLAS (2.32) im Gitterpunkt

$$(\tau_{n+1}, q_i, s_i, \pi_k) \in \bar{\mathcal{G}}, \quad n = 0, \dots, N_\tau - 1.$$

Das Superskript $n+1$ in den Mengen der Funktionswerte $\{\tilde{V}_{i,j+1,k}^{n+1}, \tilde{V}_{i,j-1,k}^{n+1}, \{\tilde{V}_{i,j,l}^{n+1}\}_{l \neq k}\}$ weist darauf hin, dass bei fixierter Variablen q die beiden Variablen s und π implizit diskretisiert werden. Dagegen wird in der Menge $\{\tilde{V}_{i,j,k}^n\}$ bei fixierten s und π die Variable q explizit diskretisiert.

Im Folgenden wird gezeigt, dass das ISLAS (2.45) über die Stabilitäts-, Konsistenz- und Monotonieeigenschaften verfügt. Dabei werden bei der Bereitstellung der nachfolgenden Definitionen und Theoreme teilweise die Formulierungen aus Chen u. Forsyth [12], [13], Forsyth u. Labahn [27], sowie Forsyth u. Vetzal [28] herangezogen.

Definition 2.1.9 (Stabilität). Das Differenzenschema (2.45) ist stabil in der diskreten Maximum-Norm, wenn für seine Lösung folgende Abschätzung gilt:

$$\|\tilde{\mathcal{V}}^{n+1}\|_\infty \leq M_1 \|\tilde{\mathcal{V}}^0\|_\infty + M_2 \max_{0 \leq n' \leq n} \|\mathcal{F}^{n'}\|_\infty, \quad n = 0, \dots, N_\tau - 1, \quad (2.46)$$

wobei $M_1, M_2 > 0$ positive, von $\Delta\tau$ und $\Delta_x = (\Delta q, \Delta s, \Delta\pi)$ und $0 \leq n \leq N_\tau$ unabhängige Konstanten sind und

$$\|\tilde{\mathcal{V}}^{n+1}\|_\infty = \max_{(i,j,k) \in \mathcal{N}_x} |\tilde{V}_{i,j,k}^{n+1}|, \quad \|\mathcal{F}^{n'}\|_\infty = \max_{(i,j,k) \in \mathcal{N}_x} |F_{i,j,k}^{n'}|,$$

wobei die Indexmenge \mathcal{N}_x gegeben ist durch

$$\mathcal{N}_x = \left\{ (i, j, k) : i = 0, \dots, N_q, j = 0, \dots, N_s, k = 0, \dots, N_\pi \right\}.$$

Theorem 2.1.10 (Stabilität). *Seien folgende Bedingungen erfüllt:*

- *der im Differenzenschema (2.45) enthaltene Differenzenoperator $(\Lambda - c)\tilde{V}_{i,j,k}^{n+1}$ mit $c = \rho + \frac{1}{\Delta_\tau}$ wird mittels der in Anhang B.3.2 gegebenen Beziehungen (B.64)-(B.65) konstruiert;*
- *die Koeffizienten von Λ in (B.64)-(B.65) genügen der Nichtnegativitätsbedingung (B.70) und die Koeffizienten in (2.36) sind ebenfalls nichtnegativ;*
- *die Approximation der Randbedingungen für q , s und π ist durch die Differenzengleichungen (2.34) bzw. (B.49) in Anhang B.3.1 gegeben;*
- *die CFL-Bedingung (2.33) ist erfüllt;*
- *zur Bestimmung von $\tilde{V}_{i(j,k,n+1),j,k}^n$ wird die lineare Interpolation (2.34) verwendet.*

Dann ist das ISLAS (2.45) stabil und es gilt die Abschätzung (2.46).

Beweis. Beweis siehe Anhang C.3. □

Es ist von Interesse, das Verhalten des Differenzenschemas (2.45) für $\Delta_\tau, \Delta_x \rightarrow 0$ zu untersuchen, bei welchem es in die kontinuierliche HJB-Gleichung übergeht.

Definition 2.1.11 (Konsistenz). Das Differenzenschema (2.45) ist mit der HJB-Gleichung (2.7) punktweise konsistent, wenn für eine hinreichend glatte Testfunktion $\varphi(\tau, q, s, \pi)$ mit beschränkten Ableitungen in jedem Gitterpunkt $(\tau_{n+1}, q_i, s_j, \pi_k) \in \bar{\mathcal{G}}$ folgende Beziehung gilt:

$$\lim_{\substack{\Delta_\tau \rightarrow 0 \\ \Delta_x \rightarrow 0}} \left\| \mathcal{D}_{i,j,k}^{n+1} \left(\Delta_\tau, \Delta_x, \varphi_{i,j,k}^{n+1}, \varphi_{i,j+1,k}^{n+1}, \varphi_{i,j-1,k}^{n+1}, \{\varphi_{i,j,l}^{n+1}\}_{l \neq k}, \{\varphi_{i,j,k}^n\} \right) - \left(\mathcal{H}(\tau, x, \varphi, \mathcal{D}\varphi, \mathcal{D}^2\varphi) \right)_{i,j,k}^{n+1} \right\|_\infty = 0 \quad (2.47)$$

mit

$$\mathcal{H}(\tau, x, \varphi, \mathcal{D}\varphi, \mathcal{D}^2\varphi) = \sup_{y \in \mathcal{U}(q)} \left\{ -\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi - \mathfrak{h}(q) \cdot y \frac{\partial}{\partial q} \varphi + F(x, y) + (\mathcal{L} - \rho) \varphi \right\},$$

wobei $\left(\mathcal{H}(\tau, x, \varphi, \mathcal{D}\varphi, \mathcal{D}^2\varphi) \right)_{i,j,k}^{n+1}$ die im Gitterpunkt $(\tau_{n+1}, q_i, s_j, \pi_k) \in \bar{\mathcal{G}}$ betrachtete linke Seite der HJB-Gleichung ist.

Definition 2.1.12. Sei \tilde{V} eine hinreichend glatte Funktion. Das Differenzenschema (2.45) approximiert die HJB-Gleichung (2.7) auf dem Gitter $\bar{\mathcal{G}}$ bezüglich $\Delta = (\Delta_\tau, \Delta_q, \Delta_s, \Delta_\pi)$ mit der Approximationsordnung

$$p = (p_1, p_2, p_3, p_4), \quad p_i > 0, \quad i = 1, \dots, 4,$$

wenn

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{D}_{i,j,k}^{n+1} \left(\Delta, \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1}, \tilde{V}_{i,j+1,k}^{n+1}, \tilde{V}_{i,j-1,k}^{n+1}, \{\tilde{V}_{i,j,l}^{n+1}\}_{l \neq k}, \{\tilde{V}_{i,j,k}^n\} \right) - \left(\mathcal{H}(\tau, x, \tilde{V}, \mathcal{D}\tilde{V}, \mathcal{D}^2\tilde{V}) \right)_{i,j,k}^{n+1} \right\|_{\infty} \\ &= \mathcal{O}(\Delta_{\tau}^{p_1} + \Delta_q^{p_2} + \Delta_s^{p_3} + \Delta_{\pi}^{p_4}) \end{aligned}$$

gilt.

Theorem 2.1.13 (Konsistenz). *Seien ein äquidistantes Gitter $\bar{\mathcal{G}}$ mit den Schrittweiten Δ_{τ} und $\Delta_x = (\Delta_q, \Delta_s, \Delta_{\pi})$ gegeben und die Bedingungen aus Theorem 2.1.10 erfüllt. Dann ist das ISLAS (2.45) mit der HJB-Gleichung (2.7) im Sinne der Bedingung (2.47) konsistent und hat die Approximationsordnung $p = (1, 1, 2, 2)$, d.h. $\mathcal{O}(\Delta_{\tau} + \Delta_q + \Delta_s^2 + \Delta_{\pi}^2)$.*

Beweis. Beweis siehe Anhang C.4. □

Für die Eigenschaft der Monotonie eines Differenzenschemas, welche bewirkt, dass zu nicht-negativen Anfangswerten auch nichtnegative Lösungen erzeugt werden, müssen folgende Kriterien erfüllt sein.

Definition 2.1.14 (Monotonie). Das Differenzenschema (2.45) ist monoton, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_{i,j,k}^{n+1} \left(\Delta_{\tau}, \Delta_x, \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1}, \tilde{V}_{i,j+1,k}^{n+1} + \Delta v^{n+1}, \tilde{V}_{i,j-1,k}^{n+1} + \Delta v^{n+1}, \{\tilde{V}_{i,j,l}^{n+1} + \Delta v^{n+1}\}_{l \neq k}, \{\tilde{V}_{i,j,k}^n + \Delta v^n\} \right) \\ & \leq \mathcal{D}_{i,j,k}^{n+1} \left(\Delta_{\tau}, \Delta_x, \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1}, \tilde{V}_{i,j+1,k}^{n+1}, \tilde{V}_{i,j-1,k}^{n+1}, \{\tilde{V}_{i,j,l}^{n+1}\}_{l \neq k}, \{\tilde{V}_{i,j,k}^n\} \right), \quad (2.48) \end{aligned}$$

$$\forall (i, j, k) \in \mathcal{N}_x, \quad \forall \Delta v^n, \Delta v^{n+1} \geq 0, \quad n = 0, \dots, N_{\tau} - 1,$$

und

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_{i,j,k}^{n+1} \left(\Delta_{\tau}, \Delta_x, \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1} + \Delta v^{n+1}, \tilde{V}_{i,j+1,k}^{n+1}, \tilde{V}_{i,j-1,k}^{n+1}, \{\tilde{V}_{i,j,l}^{n+1}\}_{l \neq k}, \{\tilde{V}_{i,j,k}^n\} \right) \\ & > \mathcal{D}_{i,j,k}^{n+1} \left(\Delta_{\tau}, \Delta_x, \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1}, \tilde{V}_{i,j+1,k}^{n+1}, \tilde{V}_{i,j-1,k}^{n+1}, \{\tilde{V}_{i,j,l}^{n+1}\}_{l \neq k}, \{\tilde{V}_{i,j,k}^n\} \right), \quad (2.49) \end{aligned}$$

$$\forall (i, j, k) \in \mathcal{N}_x, \quad \forall \Delta v^{n+1} > 0, \quad n = 0, \dots, N_{\tau} - 1.$$

Theorem 2.1.15 (Monotonie). *Seien die Bedingungen aus Theorem 2.1.10 erfüllt. Dann ist das ISLAS (2.45) nach den Bedingungen (2.48)-(2.49) monoton.*

Beweis. Beweis siehe Anhang C.5. □

Definition 2.1.16 (Konvergenz). Das Differenzenschema (2.45) für die HJB-Gleichung (2.7) ist konvergent, wenn

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\| \tilde{V}_{\Delta} - (\tilde{V})_{\Delta} \right\|_{\infty} = 0, \quad \Delta = (\Delta_{\tau}, \Delta_x),$$

gilt, wobei \tilde{V}_{Δ} die Gitterfunktion und $(\tilde{V})_{\Delta}$ die Projektion der Wertfunktion \tilde{V} auf das Gitter $\bar{\mathcal{G}}$ sind.

Theorem 2.1.17 (Konvergenz). *Das stabile, monotone, mit der HJB-Gleichung (2.7) punktweise konsistente ISLAS (2.45) ist konvergent mit der Konvergenzordnung $\mathcal{O}(\Delta_\tau + \Delta_q + \Delta_s^2 + \Delta_\pi^2)$, welche mit der Approximationsordnung übereinstimmt.*

Beweis. Der Beweis folgt unmittelbar aus der Stabilität, der Konsistenz und der Monotonie des Differenzenschemas, u.z. aus den Theoremen 2.1.10, 2.1.13 und 2.1.15. \square

Bemerkung 2.1.18. Das monotone Differenzenschema hat eine wichtige Eigenschaft: es generiert eine nichtnegative Lösung bei nichtnegativer Anfangsbedingung. Diese Besonderheit des monotonen Schemas ist besonders für das zu lösende stochastische optimale Steuerungsproblem für einen Energiespeicher von großer Bedeutung, weil die Wertfunktion als fairer Preis einer Realooption interpretiert werden kann. So wird z.B. der Realooptionspreis für die Fälle des wertlosen Verfalls des Speichers am Ende des Zeithorizontes und seiner Auflösung, bei welcher der Speicher am Ende des Zeithorizontes komplett entleert wird, nichtnegativ sein. Diese Eigenschaft des nichtnegativen Optionspreises wird durch das monotone Differenzenschema gesichert. Noch mehr ist das monotone Differenzenschema in der diskreten Maximum-Norm stabil, wenn es konsistent ist (siehe Duffy [21, Theorem 9.2]). Auf diese Weise folgt aus der Konsistenz- und der Nichtnegativitätsbedingung der Koeffizienten des Differenzenschemas die Abschätzung (2.46) und das Schema ist somit konvergent.

Außerdem garantiert die Monotoniebedingung des Differenzenschemas, dass für seine numerische Lösung, die als fairer Preis der Realooption interpretiert wird, die sogenannte *No-Arbitrage-Ungleichung* oder mit anderen Worten die diskrete Variante des *Vergleichsprinzips* (*comparison principle*) (siehe Cont u. Tankov [16, Proposition 12.12], Cont u. Voltchkova [17, Proposition 6.1]) erfüllt ist.

Theorem 2.1.19 (Diskretes No-Arbitrage-Prinzip). *Seien die Bedingungen aus Theorem 2.1.10 erfüllt. Wenn $\tilde{V}_{i,j,k}^{n+1}$ und $\tilde{v}_{i,j,k}^{n+1}$ zwei diskrete Lösungen des ISLAS (2.45) sind, so folgt aus $\tilde{V}_{i,j,k}^n \geq \tilde{v}_{i,j,k}^n$ für alle $n = 0, \dots, N_\tau - 1$ und $(i, j, k) \in \mathcal{N}_x$ die Bedingung $\tilde{V}_{i,j,k}^{n+1} \geq \tilde{v}_{i,j,k}^{n+1}$.*

Beweis. Beweis siehe Anhang C.6. \square

Bemerkung 2.1.20. Wegen der Degeneriertheit der SDE (2.2) bezüglich der Variablen q , wodurch die HJB-Gleichung (2.7) im Diffusionsteil nicht-elliptisch ist, kann man nicht garantieren, dass diese HJB-Gleichung eine klassische Lösung $\tilde{V} \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \tilde{\mathcal{X}})$ hat. In diesen Fällen kann ein schwächerer Lösungsbegriff, der in der Literatur als Viskositätslösung bezeichnet wird, betrachtet werden. Für eine Erklärung dieses Konzeptes siehe Crandall, Ishii u. Lions [19]. Die Existenz und Eindeutigkeit einer Viskositätslösung für ein allgemeines, aber konstruktiv ähnliches Speicherproblem wird in Shardin u. Szölgényi [64, Abschnitt 2] studiert. Zusammen mit diesem Resultat folgt nach Barles [2] und Barles u. Souganidis [3], dass das den Theoremen 2.1.10, 2.1.13, 2.1.15 und 2.1.19 genügende ISLAS (2.45) gegen die Viskositätslösung der HJB-Gleichung (2.7) konvergiert. So werden z.B. in Chen u. Forsyth [12], [13], [14] und Ware [73] die Differenzenschemata für Kontrollprobleme in Modellen ohne partielle Information behandelt, die diesen Theoremen genügen.

Die Frage der Existenz und Eindeutigkeit der Viskositätslösung liegt jedoch nicht im Fokus dieser Arbeit und wird somit hier nicht behandelt.

Bemerkung 2.1.21. Das stochastische optimale Steuerungsproblem für einen Pumpspeicher mit endlichem Zeithorizont ($T < \infty$) und konstanten (anstelle von Markov-modulierten) Driftkoeffizienten im Preismodell ist analog zu dem in Abschnitt 2.1 behandelten Problem (2.4), in dem die Variable π für die Filterwahrscheinlichkeit entfällt. Seine Zustandsgleichungen, das Optimierungsproblem und die Bestimmung der Koeffizienten des Differentialoperators findet man im folgenden Abschnitt 2.2, in dem der Zeithorizont jedoch als unendlich angenommen wird. Die Randbedingungen für die degenerierte HJB-Gleichung in Richtung q bleiben wie in Abschnitt 2.1.2 unverändert, zur Bestimmung der Randbedingungen für s wird nach wie vor gemäß Annahme B.2.1 aus Anhang B.2 vorausgesetzt, dass die zweiten Ableitungen nach s auf beiden Rändern gleich Null sind. Zur numerischen Lösung dieser Optimierungsaufgabe kann man die in Abschnitt 2.1.3 beschriebene SLM mit der linearen Interpolation (2.34) verwenden. Für das dabei entstehende ISLAS (ohne Filterwahrscheinlichkeit π) muss ebenfalls die CFL-Bedingung (2.33) erfüllt sein. Die Diskretisierung des Differentialoperators \mathcal{L} in der HJB-Gleichung wird in Anhang B.2 beschrieben. Analog wie in Abschnitt 2.1.4 ist das ISLAS mit zwei Ortsvariablen q und s unter der CFL-Bedingung (2.33) und der Nichtnegativität der Koeffizienten aus (2.36) stabil in der diskreten Maximum-Norm, konsistent mit der HJB-Gleichung, monoton und es gilt die No-Arbitrage-Bedingung. Dieses ISLAS wurde in Chen u. Forsyth [12] studiert und es wurde dort bewiesen, dass ein Differenzenschema mit obigen Eigenschaften gegen die eindeutige Viskositätslösung der HJB-Gleichung konvergiert.

2.1.5 Explizit-implizites Differenzenschema für das voll-regularisierte Optimalsteuerungsproblem

In diesem Abschnitt wird im Gegensatz zu dem in Abschnitt 2.1.1 gestellten semi-regularisierten stochastischen Optimalsteuerungsproblem ein voll-regularisiertes stochastisches optimales Kontrollproblem betrachtet, wie es in Abschnitt 1.3 für ein regularisiertes Optimalsteuerungsproblem mit einem allgemeinen Zustand (1.96) untersucht wurde. Für dieses Problem wird anstatt des in Abschnitt 2.1.3 entwickelten impliziten Semi-Lagrange-Approximationsschemas ein explizit-implizites Differenzenschema konstruiert, bei dem die Ableitungen nach q explizit und die Ableitungen nach s und π implizit diskretisiert werden.

Im Unterschied zur semi-regularisierten Zustandsgleichung (2.2) wird nun auch in die ODE für den Füllstand Q^u ein neuer, von den Wiener-Prozessen \widetilde{W}^S und $B^{(1)}$ unabhängiger und mit einer Konstante $\frac{\gamma_q}{\sqrt{m}}$ multiplizierter Wiener-Prozess B^Q eingeführt. Die SDE lautet dann

$$d^m Q_t^u = \widetilde{\psi}(^m Q_t^u, u_t) dt + \frac{\gamma_q}{\sqrt{m}} dB_t^Q, \quad ^m Q_0^u = q_0, \quad (2.50)$$

mit $\widetilde{\psi}(q, y) = -\widetilde{h}(q) \cdot \mathfrak{T}(y, q)$.

Weil die Regularisierung den Prozess $^m Q^u$ aus dem ursprünglichen Intervall $Q = [\underline{q}, \bar{q}]$ herausführt, nimmt der regularisierte Prozess seine Werte in ganz \mathbb{R} an. Die Menge der zulässigen Steuerungswerte $U_M := [\underline{M}_u, \overline{M}_u]$ wird mit Hilfe der in (1.94) definierten Abschneidefunktion $\mathfrak{T} : U_M \times \mathbb{R} \rightarrow U_M$ ebenfalls auf ganz \mathbb{R} (d.h. auch für $q \notin [\underline{q}, \bar{q}]$) erweitert (siehe Abbildung 1.5).

Die Gewinn- und Endauszahlungsfunktion F bzw. Φ werden nach der in Abschnitt 1.3 beschriebenen Regularisierungsprozedur umgeformt. Das regularisierte stochastische Optimalsteuerungsproblem lautet dann:

$$V^m(t, x) = \sup_{u \in \mathcal{U}_M(t, x)} J^m(t, x; u), \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \tilde{\mathcal{X}}, \quad (2.51)$$

mit $\tilde{\mathcal{X}} := \mathbb{R} \times \mathcal{S} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ und der Zielfunktion

$$J^m(t, x; u) = \mathbb{E} \left[\int_t^T e^{-\rho(r-t)} \tilde{F}({}^m X_r^u, u_r) dr + e^{-\rho(T-t)} \tilde{\Phi}({}^m X_T^u) \mid {}^m X_t^u = x \right]$$

und der Menge $\mathcal{U}_M(t, x)$ der zulässigen Markov-Steuerungsprozesse der Form ${}^m u_t = w_M(t, {}^m X_t^u)$, wobei $w_M : [0, T] \times \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{U}_M$ eine Borelfunktion ist.

Nach der Anwendung der in Abschnitt 2.1.1 getätigten Zeitumkehr ergibt sich die regularisierte HJB-Gleichung für das stochastische Kontrollproblem (2.51) als

$$\begin{aligned} \tilde{V}_\tau^m &= ({}^m \mathcal{L} - \rho) \tilde{V}^m(\tau, x) + \frac{\gamma_q^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \tilde{V}^m(\tau, x) \\ &+ \sup_{y \in \mathcal{U}_M} \left\{ \tilde{\psi}(q, y) \frac{\partial}{\partial q} \tilde{V}^m(\tau, x) + \tilde{F}(x, y) \right\}, \quad \forall (\tau, x) \in (0, T] \times \tilde{\mathcal{X}}, \quad (2.52) \\ \tilde{V}^m(0, x) &= \tilde{\Phi}(x), \quad \forall x \in \tilde{\mathcal{X}}, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{V}^m(\tau, x) := V^m(T - \tau, x)$ und ${}^m \tilde{u}_\tau = \tilde{w}_M(\tau, {}^m X_\tau^{\tilde{u}})$ die Wertfunktion bzw. die optimale Steuerung mit der Borelfunktion $\tilde{w}_M : [0, T] \times \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{U}_M$ bezeichnen. Der elliptische Differentialoperator 2. Ordnung ${}^m \mathcal{L}$ in (2.52) ist in (2.6) definiert und wird in Hinblick auf die in Abschnitt 2.1.1 eingeführten Koeffizienten a_1, b_1, a_2, b_2 und b_{12} weiter in die Form (2.10) umgeschrieben.

Der Kandidat für die optimale Strategie $\tilde{w}_M^*(\tau, x)$ wird aus der Lösung des nichtlinearen punktweisen Optimierungsproblems

$$\tilde{w}_M^*(\tau, x) = \operatorname{argmax}_{y \in \mathcal{U}_M} \left\{ \tilde{\psi}(q, y) \frac{\partial}{\partial q} \tilde{V}^m(\tau, x) + \tilde{F}(x, y) \right\}, \quad \forall (\tau, x) \in (0, T] \times \tilde{\mathcal{X}},$$

bestimmt.

Die numerische Lösung der regularisierten HJB-Gleichung (2.52) erfolgt auf dem in Abschnitt 2.1.2 definierten äquidistanten Rechtecksgitter $\bar{\mathcal{G}} = \bar{\mathcal{G}}_\tau \times \bar{\mathcal{G}}_q \times \bar{\mathcal{G}}_s \times \bar{\mathcal{G}}_\pi$. Da der Füllstand q seine Werte anstatt in $[\underline{q}, \bar{q}]$ nun in \mathbb{R} annimmt, ist es für die numerische Lösung erforderlich, den Wertebereich \mathbb{R} von ${}^m Q^u$ auf ein endliches Berechnungsgebiet einzuschränken, z.B. auf $\tilde{Q}^D := [\underline{q} - \varepsilon_1, \bar{q} + \varepsilon_1]$ mit $\varepsilon_1 > \varepsilon_q$, welches anschließend diskretisiert wird. Dabei ist die Steuerung (und auch $\mathfrak{T}(y, q)$) auf den Teilintervallen $[\underline{q} - \varepsilon_1, \underline{q} - \varepsilon_q]$ und $[\bar{q} + \varepsilon_q, \bar{q} + \varepsilon_1]$ gleich null. Das auf $\tilde{Q}^D = [\underline{q} - \varepsilon_1, \bar{q} + \varepsilon_1]$ eingeführte äquidistante Rechtecksgitter für den Füllstand ist wie folgt definiert:

$$\bar{\mathcal{G}}_q = \left\{ q_i = \underline{q} - \varepsilon_1 + i \cdot \Delta_q, \quad i = 0, \dots, N_q \right\}$$

mit der Ortsschrittweite $\Delta_q = \frac{\bar{q}-q+2\varepsilon_1}{N_q}$ und der Anzahl der Gitterpunkte $N_q + 1$.

Die Randbedingungen für die Variablen s und π sind in Abschnitt 2.1.2 eingeführt und fordern, dass die zweiten partiellen und gemischten Ableitungen der Wertfunktion \tilde{V}^m nach s und π auf den Rändern $s = \{\underline{s}, \bar{s}\}$ und $\pi = \{\underline{\pi}, \bar{\pi}\}$ für alle $\tau \in (0, T]$ und $q \in [\underline{q} - \varepsilon_1, \bar{q} + \varepsilon_1]$ gleich null sind. Neben diesen Bedingungen gelten auch die Ungleichungen (2.13), welche für die Monotonie des zu entwickelnden Differenzenschemas bezüglich der Variablen s und π sorgen. Für die Randbedingungen an den Rändern für $q = \underline{q} - \varepsilon_1$ und $q = \bar{q} + \varepsilon_1$ fordert man ebenfalls das Verschwinden der zweiten Ableitungen nach q :

$$\frac{\partial^2}{\partial q^2} \tilde{V}^m(\tau, \underline{q} - \varepsilon_1, s, \pi) = \frac{\partial^2}{\partial q^2} \tilde{V}^m(\tau, \bar{q} + \varepsilon_1, s, \pi) = 0, \quad \forall (\tau, s, \pi) \in (0, T] \times [\underline{s}, \bar{s}] \times [\underline{\pi}, \bar{\pi}].$$

Diese Forderung kann insbesondere dadurch gerechtfertigt werden, dass die Werte des Füllstandes q und der Steuerung y außerhalb des Intervalls $[\underline{q} - \varepsilon_q, \bar{q} + \varepsilon_q]$ aus praktischer Hinsicht nicht relevant sind. Von daher sind die Funktionswerte von \tilde{V}^m außerhalb des Intervalls $[\underline{q} - \varepsilon_q, \bar{q} + \varepsilon_q]$ ebenso unwichtig, was ermöglicht \tilde{V}_{qq}^m für $q = \{\underline{q} - \varepsilon_1, \bar{q} + \varepsilon_1\}$ gleich null zu setzen. Zusammen mit dieser Annahme gelten außerdem die Reflexionsbedingungen (2.18), welche wegen der Regularisierung der SDE (2.1) bezüglich der Variablen q wie folgt umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\underline{q}, y) &\geq 0 \quad \text{für} \quad y = \tilde{w}_M(\tau, \underline{q}, s, \pi) \in U_M, \\ \tilde{\psi}(\bar{q}, y) &\leq 0 \quad \text{für} \quad y = \tilde{w}_M(\tau, \bar{q}, s, \pi) \in U_M, \end{aligned} \tag{2.53}$$

für alle $(\tau, s, \pi) \in (0, T] \times [\underline{s}, \bar{s}] \times [\underline{\pi}, \bar{\pi}]$.

Die obigen Bedingungen sichern außerdem die Monotonie des nachfolgend entwickelten Differenzenschemas bezüglich der Variablen q .

Für die nachfolgende Herleitung des Differenzenverfahrens zur numerischen Lösung der regularisierten HJB-Gleichung (2.52) wird in der Notation der Einfachheit halber der Index m unterdrückt und die regularisierten Funktionen \tilde{F} , $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\psi}$ werden mit F , Φ , ψ bezeichnet.

Im Gegensatz zu der in Abschnitt 2.1.3 beschriebenen Semi-Lagrange-Methode zur numerischen Lösung der semi-regularisierten HJB-Gleichung (2.7) wird im Weiteren ein explizit-implizites Differenzenschema für die voll-regularisierte HJB-Gleichung (2.52) entwickelt, in der die partiellen Ableitungen der Wertfunktion \tilde{V} nach dem Füllstand q explizit und die Ableitungen nach dem Preis s , sowie nach der Filterwahrscheinlichkeit π implizit diskretisiert werden. Da das punktweise Optimierungsproblem in der HJB-Gleichung (2.52) die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial q} \tilde{V}$ nach der Variablen q enthält, führt die explizite Diskretisierung des Füllstandes q dazu, dass in diesem Falle in jedem Zeitschritt lediglich ein lineares Gleichungssystem zu lösen ist. Bei einer impliziten Diskretisierung von q würden die nichtlinearen Gleichungssysteme entstehen.

Es bezeichne

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(y) = \psi(q, y) \frac{\partial}{\partial q}$$

den im punktweisen Optimierungsproblem der HJB-Gleichung enthaltenen Differentialoperator erster Ordnung. Die Diskretisierung von \mathcal{A} erfolgt mit Hilfe der folgenden Upwind-Differenzen-

approximation:

$$\mathcal{A}_\Delta(y) \tilde{V}_{i,j,k}^n = \begin{cases} \frac{\psi(q,y) + |\psi(q,y)|}{2} \frac{\tilde{V}_{1,j,k}^n - \tilde{V}_{0,j,k}^n}{\Delta_q}, & i = 0, \\ \frac{\psi(q_i,y) + |\psi(q_i,y)|}{2} \frac{\tilde{V}_{i+1,j,k}^n - \tilde{V}_{i,j,k}^n}{\Delta_q} + \\ \frac{\psi(q_i,y) - |\psi(q_i,y)|}{2} \frac{\tilde{V}_{i,j,k}^n - \tilde{V}_{i-1,j,k}^n}{\Delta_q}, & i = 1, \dots, N_q - 1, \\ \frac{\psi(\bar{q},y) - |\psi(\bar{q},y)|}{2} \frac{\tilde{V}_{N_q,j,k}^n - \tilde{V}_{N_q-1,j,k}^n}{\Delta_q}, & i = N_q. \end{cases} \quad (2.54)$$

Hierbei entfällt in (2.54) für q_0 und q_{N_q} der Rückwärtsdifferenzenquotient $\frac{\tilde{V}_{i,j,k}^n - \tilde{V}_{i-1,j,k}^n}{\Delta_q}$ bzw. Vorwärtsdifferenzenquotient $\frac{\tilde{V}_{i+1,j,k}^n - \tilde{V}_{i,j,k}^n}{\Delta_q}$ wegen der Reflexionsbedingungen (2.53).

Die oben beschriebene Diskretisierung der Ableitungen in der voll-regularisierten HJB-Gleichung (2.52)

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{V} \right)_{i,j,k}^{n+1} = ((\mathcal{L} - \rho) \tilde{V})_{i,j,k}^{n+1} + \left(\frac{\gamma_q^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \tilde{V} \right)_{i,j,k}^n + \left(\sup_{y \in \mathbb{U}_M} \left\{ \mathcal{A}(y) \tilde{V} + F(x, y) \right\} \right)_{i,j,k}^n \quad (2.55)$$

liefert zusammen mit dem Differenzenoperator (2.54)

$$(\Lambda - c) \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1} = -\frac{\gamma_q^2}{2m} \frac{\tilde{V}_{i-1,j,k}^n - 2\tilde{V}_{i,j,k}^n + \tilde{V}_{i+1,j,k}^n}{\Delta_q^2} - \frac{1}{\Delta_\tau} \tilde{V}_{i,j,k}^n \\ - \max_{y \in \mathbb{U}_M} \left\{ \mathcal{A}_\Delta(y) \tilde{V}_{i,j,k}^n + F(q_i, s_j, y) \right\} \quad (2.56)$$

mit $c := \rho + \frac{1}{\Delta_\tau} > 0$, wobei Λ in (2.56) ein diskretes Analogon für den Differentialoperator \mathcal{L} aus (2.55) ist (siehe (B.62), (B.64) in Anhang B.3.2). Durch das Lösen des im Gitterpunkt $(\tau_n, q_i, s_j, \pi_k) \in \bar{\mathcal{G}}$ betrachteten punktwweisen Optimierungsproblems aus (2.56) wird der Kandidat $\tilde{w}_{M,i,j,k}^{*n+1} := \tilde{w}_M^*(\tau_{n+1}, q_i, s_j, \pi_k)$ für die optimale Strategie bestimmt. Die optimale Strategie $\tilde{w}_{M,i,j,k}^{*n+1}$ gemäß (2.56) wird also nur mit den Werten der Wertfunktion $\tilde{V}_{i,j,k}^n$ zur Zeit τ_n berechnet.

Die rechte Seite der Differenzengleichung (2.56) kann man für die inneren Gitterpunkte q_i , $i = 1, \dots, N_q - 1$, und fixierte n, j und k weiterhin als ein 3-Punkt-Differenzenschema (2.38) darstellen, sodass als Kurzschreibweise für das Differenzenschema (2.56) folgende Darstellung entsteht:

$$(\Lambda - c) \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1} = -\bar{H}_{i,j,k}^n, \quad (2.57)$$

mit

$$-\bar{H}_{i,j,k}^n := -\max_{y \in \mathbb{U}_M} \left\{ A_{i,j,k}^{(q),n} \tilde{V}_{i-1,j,k}^n + C_{i,j,k}^{(q),n} \tilde{V}_{i,j,k}^n + B_{i,j,k}^{(q),n} \tilde{V}_{i+1,j,k}^n + F(q_i, s_j, y) \right\},$$

wobei die Koeffizienten $A_{i,j,k}^{(q),n}$, $B_{i,j,k}^{(q),n}$ und $C_{i,j,k}^{(q),n}$ für alle $i = 1, \dots, N_q - 1$ im Unterschied zu denen aus (2.36) nach folgenden Formeln bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
 A_{i,j,k}^{(q),n} &= \frac{\gamma_q^2}{2m \cdot \Delta_q^2} - \frac{\psi(q_i, y) - |\psi(q_i, y)|}{2\Delta_q} > 0, \\
 B_{i,j,k}^{(q),n} &= \frac{\gamma_q^2}{2m \cdot \Delta_q^2} + \frac{\psi(q_i, y) + |\psi(q_i, y)|}{2\Delta_q} > 0, \\
 C_{i,j,k}^{(q),n} &= \frac{1}{\Delta_\tau} - A_{i,j,k}^{(q),n} - B_{i,j,k}^{(q),n} = \frac{1}{\Delta_\tau} - \frac{\gamma_q^2}{m \cdot \Delta_q^2} - \frac{|\psi(q_i, y)|}{\Delta_q}.
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

Somit entsteht das folgende *explizit-implizite Differenzenschema* für die voll-regularisierte HJB-Gleichung (2.52):

$$\begin{aligned}
 (\Lambda - c)\tilde{V}_{i,j,k}^{n+1} &= - \max_{y \in \mathbb{U}_M} \left\{ A_{i,j,k}^{(q),n} \tilde{V}_{i-1,j,k}^n + C_{i,j,k}^{(q),n} \tilde{V}_{i,j,k}^n + B_{i,j,k}^{(q),n} \tilde{V}_{i+1,j,k}^n + F(q_i, s_j, y) \right\}, \\
 \tilde{w}_{M,i,j,k}^{*n+1} &= \operatorname{argmax}_{y \in \mathbb{U}_M} \left\{ \mathcal{A}_\Delta(y) \tilde{V}_{i,j,k}^n + F(q_i, s_j, y) \right\}, \\
 \tilde{V}_{i,j,k}^0 &= \Phi(q_i, s_j).
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Die Forderung, dass die zweite partielle Ableitung \tilde{V}_{qq} am Rand, d.h. für $q = \{q - \varepsilon_1, \bar{q} + \varepsilon_1\}$, gleich null ist, und die Reflexionsbedingung (2.53) sichern, dass die Koeffizienten $A_{N_q,j,k}^{(q),n} = -\frac{\psi(\bar{q}, y) - |\psi(\bar{q}, y)|}{2\Delta_q}$ und $B_{0,j,k}^{(q),n} = \frac{\psi(\underline{q}, y) + |\psi(\underline{q}, y)|}{2\Delta_q}$ nichtnegativ sind. Damit auch der Koeffizient $C_{i,j,k}^{(q),n}$ für alle $i = 0, \dots, N_q$ in (2.58) nichtnegativ ist, muss folgende Bedingung gelten:

$$\Delta_q \geq \Delta_\tau \frac{\gamma_q^2}{m \cdot \Delta_q} + \Delta_\tau \max_{q \in [\underline{q}, \bar{q}]} \left\{ h(q) \cdot \max(|\underline{u}(q)|, \bar{u}(q)) \right\}, \tag{2.60}$$

welche eine Variante der CFL-Bedingung (2.33) für das aufgestellte explizit-implizite Differenzenschema (2.59) ist.

Es sei bemerkt, dass für $m \rightarrow \infty$ die CFL-Bedingung (2.60) (die ebenfalls die Monotonie des explizit-impliziten Differenzenschemas (2.59) bezüglich der Variablen q sichert) mit der für das ISLAS (2.32) hergeleiteten CFL-Bedingung (2.33) übereinstimmt.

Nachdem die optimale Strategie gefunden ist, werden die die Steuerung enthaltenen Funktionen $\psi(q_i, y)$ in (2.58) an der Stelle y durch $\tilde{w}_{M,i,j,k}^{*n+1}$ ersetzt und die Differenzengleichung (2.57) mit der bekannten rechten Seite $-\bar{H}_{i,j,k}^n$ in Matrixform (2.41) aus Abschnitt 2.1.3 dargestellt. Das Lösen des entstehenden linearen Gleichungssystems liefert den Lösungsvektor \tilde{V}^{n+1} für die Wertfunktion $\tilde{V}_{i,j,k}^{n+1}$ für alle $n = 0, \dots, N_\tau - 1$.

Außerdem gelten für das entwickelte explizit-implizite Differenzenschema (2.59) die für das ISLAS (2.32) in Abschnitt 2.1.4 bewiesenen Theoreme 2.1.10, 2.1.13 und 2.1.15, welche besagen, dass unter der CFL-Bedingung (2.60) das Differenzenschema (2.59) stabil, konsistent und monoton ist, woraus unmittelbar seine Konvergenz mit $\mathcal{O}(\Delta_\tau + \Delta_q + \Delta_s^2 + \Delta_\pi^2)$ folgt. Für das erhaltene Differenzenschema (2.59) gilt ebenfalls das diskrete No-Arbitrage-Prinzip 2.1.19.

2.2 Unendlicher Zeithorizont

Dieser Abschnitt widmet sich der numerischen Lösung des im letzten Abschnitt betrachteten stochastischen Kontrollproblems für den Fall eines unendlichen Zeithorizontes. Die zugehörige HJB-Gleichung ist dann eine zeitunabhängige nichtlineare PDE. Die in Abschnitt 2.1 entwickelten Diskretisierungsverfahren können nicht direkt übertragen werden, da sie auf die Lösung von nichtlinearen anstelle von linearen algebraischen Gleichungssystemen führen. Dies erschwert eine effiziente numerische Lösung erheblich. Deshalb wird in Abschnitt 2.2.2 zunächst eine iterative Lösung des Kontrollproblems mit Hilfe des Policy-Improvement-Algorithmus betrachtet. Dort ist in jedem Iterationsschritt eine lineare PDE zu lösen. Deren Diskretisierung mit Hilfe von Differenzenverfahren führt wieder auf die Lösung von linearen Gleichungssystemen. Abschnitt 2.2.3 behandelt dieses Verfahren exemplarisch für ein Kontrollproblem mit einem zweidimensionalen Zustand, wie es für ein Modell mit vollständiger Information über die Driftparameter des Preisprozesses entsteht. Es wird gezeigt, dass für die entwickelte diskrete Version des Policy-Improvement-Algorithmus die für das Verfahren typische Monotonieeigenschaft erhalten bleibt.

2.2.1 Optimalsteuerungsproblem

Es wird nun das in Abschnitt 2.1.5 gestellte stochastische optimale Steuerungsproblem für den Fall eines unendlichen Zeithorizontes ($T = \infty$) untersucht. Die Dynamik eines dreidimensionalen stochastischen Prozesses $({}^m X_t^u)_{t \in [0, \infty)} := ({}^m Q_t^u, {}^m S_t, {}^m \Pi_t)_{t \in [0, \infty)}$ genügt einer SDE vom Typ (1.96)

$$\begin{aligned} d {}^m Q_t^u &= \tilde{\psi}({}^m Q_t^u, u_t) dt + \frac{\gamma_q}{\sqrt{m}} dB_t^Q, & {}^m Q_0^u &= q, \\ d {}^m S_t &= \tilde{a}_S({}^m S_t, {}^m \Pi_t) dt + b_S({}^m S_t) d\tilde{W}_t^S, & {}^m S_0 &= s, \\ d {}^m \Pi_t &= \tilde{\alpha}({}^m \Pi_t) dt + \tilde{\beta}({}^m S_t, {}^m \Pi_t) d\tilde{W}_t^S + \frac{\gamma_\pi}{\sqrt{m}} dB_t^{(1)}, & {}^m \Pi_0 &= \pi, \end{aligned} \quad (2.61)$$

mit den in Abschnitt 2.1 definierten Koeffizienten $\tilde{\psi}$, \tilde{a}_S , $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$. Dabei gilt für die Rate des Volumenstromes $y \in U_M := [\underline{M}_u, \overline{M}_u]$ und die Menge der zulässigen Steuerungswerte U_M ist somit vom Zustandsprozess unabhängig. Die Gewinnfunktion F wird wie in (1.38) definiert. Nach ihrer Regularisierung erhält man ein stochastisches optimales Steuerungsproblem der Form (1.120)-(1.121) mit der Zielfunktion

$$\begin{aligned} J^m(x; u) &= \mathbb{E} \left[\int_0^\infty e^{-\rho t} \tilde{F}({}^m X_t^u, u_t) dt \mid {}^m X_0^u = x \right], \\ \forall x \in \tilde{\mathcal{X}} &:= \mathbb{R} \times \mathcal{S} \times \mathbb{R}, \quad u \in \mathcal{U}_M(x), \end{aligned} \quad (2.62)$$

und der Wertfunktion

$$V^m(x) = \sup_{u \in \mathcal{U}_M(x)} J^m(x; u) \quad (2.63)$$

mit der Menge $\mathcal{U}_M(x)$ der zulässigen Markov-Steuerungsprozesse. Die HJB-Gleichung für das regularisierte stochastische Optimalsteuerungsproblem (2.63) mit unendlichem Zeithorizont lautet (siehe Gleichung (1.123)):

$$({}^m\mathcal{L} - \rho)V^m(x) + \sup_{y \in \mathcal{U}_M} \left\{ \mathcal{A}(y)V^m(x) + \tilde{F}(x, y) \right\} = 0, \quad \forall x \in \tilde{\mathcal{X}}, \quad (2.64)$$

wobei $\mathcal{A}(y) = \tilde{\psi}(q, y) \frac{\partial}{\partial q}$ ein die partielle Ableitung nach q enthaltener Differentialoperator ist.

Der Einfachheit halber entfällt im Weiteren der Index m und die regularisierten Funktionen $\tilde{\psi}$ und \tilde{F} werden mit ψ bzw. F bezeichnet.

2.2.2 Policy Improvement

Das regularisierte stochastische Optimalsteuerungsproblem (2.63) wird auf die Lösung der mit ihm assoziierten HJB-Gleichung (2.64) zurückgeführt. Die Bestimmung eines Kandidaten für die optimale Strategie $w_M^*(x)$ erfolgt durch das Lösen des punktwweisen Optimierungsproblems in (2.64). Dabei hängt die optimale Strategie $w_M^*(x)$ von der Wertfunktion $V(x)$ und insbesondere von deren Ableitung $\frac{\partial}{\partial q} V(x)$ nach der Zustandsvariablen q ab. Die Wertfunktion $V(x)$ selbst wird dabei aus der HJB-Gleichung (2.64) bestimmt, was zusammen mit der expliziten Abhängigkeit der Strategie von der Wertfunktion generell zu einer komplizierten nichtlinearen PDE führt. Deshalb soll im Weiteren eine alternative Lösungsmöglichkeit betrachtet werden.

Zur Lösung von Optimalsteuerungsproblemen der Form (2.63) wird in der Literatur (siehe z.B. Bäuerle u. Rieder [5], Rogers [56]) ein iteratives Näherungsverfahren betrachtet, das *Policy-Improvement-Algorithmus* heißt und ausgehend von einer zulässigen Steuerung, die als Startnäherung gewählt wird, in jedem Schritt eine neue Steuerung mit einem besser Zielfunktionswert konstruiert. Dabei ist in jedem Iterationsschritt anstatt einer nichtlinearen HJB-Gleichung eine *lineare* PDE zu lösen. Formal entsteht diese, wenn in der HJB-Gleichung das sup entfällt und u durch die jeweilige Näherung der Steuerung ersetzt wird. Die Anwendung des Policy-Improvement-Algorithmus führt zu einer sequentiellen Verbesserung der Zielfunktion J .

Im Weiteren wird der Policy-Improvement-Algorithmus für den Fall $T = \infty$ mit dem Zustand $x \in \tilde{\mathcal{X}}$ des regularisierten stochastischen optimalen Kontrollproblems (2.63) beschrieben, dessen Dynamik durch die SDE (2.61) modelliert wird.

Im dargestellten Algorithmus 1 sind δ_J und δ_u vordefinierte Konstanten, welche die Genauigkeit der Näherung steuern. k_{\max} ist dabei die maximal erlaubte Anzahl von Iterationen.

Der Policy-Improvement-Algorithmus wird durch die in Bäuerle u. Rieder [5, Abschnitt 3] beschriebene folgende Eigenschaft charakterisiert.

Sei $k \geq 0$ und $J^{(k)} \in \mathcal{C}^2(\tilde{\mathcal{X}})$ die Zielfunktion bezüglich einer zulässigen Strategie $w_M^{(k)}(x) \in \mathcal{U}_M$. Weiterhin definiert man für die in Schritt 2 des Policy-Improvement-Algorithmus 1 bestimmte Strategie $w_M^{(k+1)}(x) \in \mathcal{U}_M$, $x \in \tilde{\mathcal{X}}$, folgende Menge:

$$\mathcal{E} := \left\{ x \in \tilde{\mathcal{X}} \mid (\mathcal{L} - \rho)J^{(k)}(x; w_M^{(k+1)}(x)) + \mathcal{A}(w_M^{(k+1)})J^{(k)}(x; w_M^{(k+1)}(x)) + F(x, w_M^{(k+1)}(x)) > 0 \right\}.$$

Algorithmus 1 Policy-Improvement-Algorithmus

1. Startnäherung: Setze $k = 0$ und wähle eine zulässige Strategie (Startnäherung) $w_M^{(0)}(x)$ für alle $x \in \tilde{\mathcal{X}}$. Wähle Abbruchschranken $\delta_J, \delta_u > 0$ und $k_{\max} \in \mathbb{N}$;

2. Iteration: Bestimme $J^{(k)}(x) := J(x; w_M^{(k)}(x))$ für alle $x \in \tilde{\mathcal{X}}$ als Lösung der PDE

$$(\mathcal{L} - \rho)J^{(k)}(x) + \mathcal{A}(w_M^{(k)})J^{(k)}(x) + F(x, w_M^{(k)}(x)) = 0 \quad (2.65)$$

mit $\mathcal{A}(w_M^{(k)}) = \psi(x, w_M^{(k)}(x)) \frac{\partial}{\partial q}$, $\psi(x, w_M^{(k)}(x)) = -\mathfrak{h}(q) \cdot w_M^{(k)}(x)$ und die Strategie

$$w_M^{(k+1)}(x) = \operatorname{argmax}_{y \in \mathbb{U}_M} \left(\mathcal{A}(w_M^{(k)})J^{(k)}(x) + F(x, y) \right); \quad (2.66)$$

3. Abbruchkriterium: Falls für alle $x \in \tilde{\mathcal{X}}$

$$|J^{(k)}(x) - J^{(k+1)}(x)| < \delta_J \quad \text{und} \quad |w_M^{(k)}(x) - w_M^{(k+1)}(x)| < \delta_u, \quad \text{oder} \quad k = k_{\max},$$

dann breche ab. Sonst setze $k = k + 1$ und gehe zu Schritt 2.

Falls $\mathcal{E} \neq \emptyset$ und die Bedingung

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} \mathbb{E} \left[J^{(k)}(X_t^{(0,x,u^{(k+1)})}) \mid X_0^{u^{(k+1)}} = x \right] \leq 0,$$

erfüllt ist, dann gilt $J^{(k+1)}(x) \geq J^{(k)}(x)$ für alle $x \in \tilde{\mathcal{X}}$ und $J^{(k+1)}(x) > J^{(k)}(x)$ für alle $x \in \mathcal{E}$. Dies bedeutet, dass die Strategie $w_M^{(k)}(x)$ und die Zielfunktion $J^{(k)}(x)$ verbessert werden, solange die linke Seite in der PDE (2.65), mit $w_M^{(k)}(x)$ durch $w_M^{(k+1)}(x)$ ersetzt, größer null ist. Ansonsten, wenn $\mathcal{E} = \emptyset$ zusammen mit

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} e^{-\rho t} \mathbb{E} \left[J^{(k)}(X_t^{(0,x,u^{(k+1)})}) \mid X_0^{u^{(k+1)}} = x \right] \geq 0$$

gilt, dann ist $w_M^{(k+1)}$ die optimale Strategie (siehe Theorem 3.4 in Bäuerle u. Rieder [5]).

Bemerkung 2.2.1. Das Policy-Improvement-Verfahren kann man ebenfalls zur Lösung der stochastischen Kontrollprobleme mit endlichem Zeithorizont verwenden. So z.B. für das in Abschnitt 1.3 definierte regularisierte stochastische Optimierungsproblem mit endlichem Zeithorizont ($T < \infty$) stellt man die PDE vom Typ (2.65) für alle $(t, x) \in [0, T) \times \tilde{\mathcal{X}}$ wie folgt auf:

$$\frac{\partial}{\partial t} J^{(k)}(t, x) + (\mathcal{L} - \rho)J^{(k)}(t, x) + \mathcal{A}(w_M^{(k)})J^{(k)}(t, x) + F(x, w_M^{(k)}(t, x)) = 0.$$

Analog wird die Menge

$$\mathcal{E} := \left\{ (t, x) \in [0, T) \times \tilde{\mathcal{X}} \mid \frac{\partial}{\partial t} J^{(k)}(t, x; w_M^{(k+1)}(t, x)) + (\mathcal{L} - \rho)J^{(k)}(t, x; w_M^{(k+1)}(t, x)) + \mathcal{A}(w_M^{(k+1)})J^{(k)}(t, x; w_M^{(k+1)}(t, x)) + F(x, w_M^{(k+1)}(t, x)) > 0 \right\}$$

eingeführt.

Wenn \mathcal{E} nicht leer ist, dann gilt $J^{(k+1)}(t, x) \geq J^{(k)}(t, x)$ für alle $(t, x) \in [0, T) \times \tilde{\mathcal{X}}$ und $J^{(k+1)}(t, x) > J^{(k)}(t, x)$ für alle $(t, x) \in \mathcal{E}$. Ansonsten ist $w_M^{(k+1)}$ die optimale Strategie (siehe Theorem 3.1 in Bäuerle u. Rieder [5]).

2.2.3 Numerische Lösung

In diesem Abschnitt wird eine diskrete Version des Policy-Improvement-Algorithmus entwickelt. Hierfür wird die im Iterationsschritt enthaltene lineare PDE (2.65) näherungsweise mit Hilfe von Differenzenverfahren gelöst. Dies erfolgt exemplarisch für das Modell mit vollständiger Information über die Driftparameter des Preisprozesses, d.h. für ein Kontrollproblem mit dem zweidimensionalen Zustand $X^u = (Q^u, S)$. Grundsätzlich kann das vorgestellte Verfahren auch auf das Kontrollproblem mit dreidimensionalem Zustand $X^u = (Q^u, S, \Pi)$ übertragen werden, allerdings entstehen dann sehr große lineare Gleichungssysteme der Dimension $(N_q + 1) \times (N_s + 1) \times (N_\pi + 1)$.

Anstelle des in Abschnitt 2.2.1 betrachteten Kontrollproblems mit dem dreidimensionalen Zustand $X^u = (Q^u, S, \Pi)$ wird im Weiteren ein Problem für den zweidimensionalen Zustand $X^u = (Q^u, S)$ untersucht, dessen Dynamik durch die SDE

$$\begin{aligned} dQ_t^u &= \psi(Q_t^u, u_t) dt + \frac{\gamma_q}{\sqrt{m}} dB_t^Q, & Q_0^u &= q, \\ dS_t &= \kappa(\mu - S_t) dt + \sigma dW_t^S, & S_0 &= s, \end{aligned}$$

beschrieben wird. Aus dem beschriebenen Policy-Improvement-Algorithmus folgt, dass anstatt der HJB-Gleichung (2.64) eine Folge von linearen PDEs der Form (2.65) für die Zielfunktion $J^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots$, gelöst wird:

$$(\mathcal{L} - c)J^{(k)}(q, s) + \mathcal{A}(w_M^{(k)})J^{(k)}(q, s) + F(q, s, w_M^{(k)}(q, s)) = 0 \quad (2.67)$$

mit $\mathcal{A}(w_M^{(k)}) = \psi(q, w_M^{(k)}(q, s)) \frac{\partial}{\partial q}$, $\psi(q, w_M^{(k)}(q, s)) = -h(q) \cdot w_M^{(k)}(q, s)$ und dem Differentialoperator

$$\mathcal{L} = \kappa(\mu - s) \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\gamma_q^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2}. \quad (2.68)$$

Dabei wird angenommen, dass für alle $(q, s) \in \mathbb{R} \times \mathcal{S}$ eine zulässige Startstrategie $w_M^{(0)}(q, s) \in \mathcal{U}_M$ gegeben ist. Als solche kann man z.B. die Nullsteuerung $w_M^{(0)}(q, s) = 0$ wählen, die für das gestellte Energiespeicherproblem immer zulässig ist. Alternativ kann man auch die optimale Strategie zur Zeit $t = 0$ aus dem Modell mit endlichem aber hinreichend großen Zeithorizont betrachten. Somit kann man basierend auf der im k -ten Iterationsschritt berechneten Zielfunktion $J^{(k)}(q, s; w_M^{(k)}(q, s))$ eine bessere Strategie nach Regel (2.66) für $k+1$ bestimmen:

$$w_M^{(k+1)}(q, s) = \arg \max_{y \in \mathcal{U}_M} \left(\mathcal{A}(y)J^{(k)}(q, s) + F(q, s, y) \right). \quad (2.69)$$

Außerdem können die Differentialoperatoren (2.68) und $\mathcal{A}(y)$ in der Form (B.34) aus Anhang B.3.1 umgeschrieben werden. Unter Verwendung der Darstellungen für die zweiten Ableitungen der Funktion V nach q bzw. s

$$\frac{\gamma_q^2}{2m} \frac{\partial^2 V}{\partial q^2} = \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\gamma_q^2}{2m} \frac{\partial V}{\partial q} \right) \quad \text{und} \quad \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial V}{\partial s} \right)$$

ergeben sich für die Koeffizienten der PDE (2.67) und des Differentialoperators (2.68) folgende Beziehungen zu den im Anhang B.3.1 verwendeten Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} b_1(q, s) &= \frac{\gamma_q^2}{2m}, & b_2(q, s) &= \frac{\sigma^2}{2}, & a_1(q, s) &= \psi(q, w_M(q, s)), \\ a_2(q, s) &= \kappa(\mu - s) & c_1(q, s) &= c_2(q, s) = \frac{\rho}{2} > 0, & c(q, s) &= \rho > 0. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Mittels der neuen Notation (2.70) erhält der Differentialoperator \mathcal{L} in der PDE (2.67) folgende Gestalt:

$$\mathcal{L} = a_2(q, s) \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} \left(b_2(q, s) \frac{\partial}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left(b_1(q, s) \frac{\partial}{\partial q} \right). \quad (2.71)$$

Die Lösung der PDE (2.67) und die optimale Strategie (2.69) werden numerisch ermittelt. Hierzu wird der unbeschränkte Zustandsraum $\mathbb{R} \times \mathcal{S} = \mathbb{R}^2$ zunächst auf ein endliches Berechnungsgebiet $\tilde{\mathcal{Q}}^D \times \tilde{\mathcal{S}}^D = [\underline{q} - \varepsilon_1, \bar{q} + \varepsilon_1] \times [\underline{s}, \bar{s}]$ eingeschränkt. Dabei wird wie in Abschnitt 2.1.5 $\varepsilon_1 > \varepsilon_q$ gewählt und die Grenzen \underline{s}, \bar{s} werden aus der stationären Verteilung des OU-Prozesses mit der 3- σ -Regel bestimmt: $\tilde{\mathcal{S}}^D = [\underline{s}, \bar{s}] = [\mu - 3\frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa}}, \mu + 3\frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa}}]$. Auf $\tilde{\mathcal{G}} = \tilde{\mathcal{Q}}^D \times \tilde{\mathcal{S}}^D$ wird schließlich das äquidistante Rechtecksgitter

$$\bar{\mathcal{G}} = \bar{\mathcal{G}}_q \times \bar{\mathcal{G}}_s = [q_0, \dots, q_{N_q}] \times [s_0, \dots, s_{N_s}]$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{G}}_q &= \left\{ q_i = \underline{q} - \varepsilon_1 + i \cdot \Delta_q, i = 0, \dots, N_q \right\}, \\ \bar{\mathcal{G}}_s &= \left\{ s_j = \underline{s} + j \cdot \Delta_s, j = 0, \dots, N_s \right\}, \end{aligned}$$

definiert, wobei

$$\Delta_q = \frac{\bar{q} - \underline{q} + 2\varepsilon_1}{N_q}, \quad \Delta_s = \frac{\bar{s} - \underline{s}}{N_s},$$

die Ortsschrittweiten sowie $N_q + 1$ und $N_s + 1$ die Anzahl der Gitterpunkte für den Füllstand q bzw. für den Preis s sind.

Außerdem bezeichnet $J_{\Delta}^{(k)}(q_i, s_j) = J_{i,j}^{(k)}$ die mit dem nachfolgend beschriebenen Differenzenverfahren erhaltene Approximation von $J^{(k)}$ im Gitterpunkt (q_i, s_j) .

Bemerkung 2.2.2. Den oben eingeführten Bezeichnungen entspricht folgende Notation aus Anhang B.3.1: die allgemeinen Variablen x_1 und x_2 sind dort q bzw. s , die Gitterpunkte $x_1^{j_1}$ und $x_2^{j_2}$ entsprechen q_i und s_j , die Ortsschrittweiten Δ_1 und Δ_2 stimmen mit Δ_q und Δ_s überein.

Wir betrachten die im k -ten Iterationschritt zu lösende PDE (2.67) für $J^{(k)}$ zu gegebener Strategie $w_M^{(k)}$. Diese kann als folgende lineare zweidimensionale elliptische partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form (B.34) aus Anhang B.3 (ohne gemischte Ableitung) dargestellt werden. Der Iterationsindex k wird der Einfachheit halber weggelassen:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L} - c)J &= -F(q, s) \text{ mit } \mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 \text{ und } c_1 = c_2 = \frac{\rho}{2} > 0, \quad c = \rho > 0, \\ (\mathcal{L}_1 - c_1)J &= \frac{\partial}{\partial q} \left(b_1(q, s) \frac{\partial}{\partial q} J \right) + a_1(q, s) \frac{\partial}{\partial q} J - c_1(q, s)J, \quad (q, s) \in G, \\ (\mathcal{L}_2 - c_2)J &= \frac{\partial}{\partial s} \left(b_2(q, s) \frac{\partial}{\partial s} J \right) + a_2(q, s) \frac{\partial}{\partial s} J - c_2(q, s)J, \end{aligned} \quad (2.72)$$

wobei $\mathcal{A}(w_M) = a_1(q, s) \frac{\partial}{\partial q}$ mit $a_1(q, s) = \psi(q, w_M(q, s))$ gilt.

Um die PDE (2.67) für jedes k numerisch zu lösen, benötigt man neben der Gleichung (2.72) auch die Randbedingungen. Wie bereits in den früheren Abschnitten soll hier wieder das Verschwinden der zweiten Ableitungen auf dem Rand von $\bar{G} = \bar{Q}^D \times \bar{S}^D$ gefordert werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial q^2} J(\underline{q} - \varepsilon_1, s) &= \frac{\partial^2}{\partial q^2} J(\bar{q} + \varepsilon_1, s) = 0, \quad s \in [\underline{s}, \bar{s}], \\ \frac{\partial^2}{\partial s^2} J(q, \underline{s}) &= \frac{\partial^2}{\partial s^2} J(q, \bar{s}) = 0, \quad q \in [\underline{q} - \varepsilon_1, \bar{q} + \varepsilon_1]. \end{aligned}$$

Unter diesen Randbedingungen nimmt die PDE (2.72) an den Rändern eine einfachere Gestalt wie in (B.38) an:

- für $q = \{\underline{q} - \varepsilon_1, \bar{q} + \varepsilon_1\}$ gilt $\frac{\partial^2}{\partial q^2} J(q, s) = 0$ und somit
 $r_1 \frac{\partial}{\partial q} J + \mathcal{L}_2 J - cJ = -F, \quad s \in [\underline{s}, \bar{s}], \quad \text{mit } r_1 = r_1(q, s) = \frac{\partial b_1}{\partial q} + a_1;$
- für $s = \{\underline{s}, \bar{s}\}$ gilt $\frac{\partial^2}{\partial s^2} J(q, s) = 0$ und somit
 $\mathcal{L}_1 J + r_2 \frac{\partial}{\partial s} J - cJ = -F, \quad q \in [\underline{q} - \varepsilon_1, \bar{q} + \varepsilon_1], \quad \text{mit } r_2 = r_2(q, s) = \frac{\partial b_2}{\partial s} + a_2.$

Diese Gleichungen werden in Anhang B.3.1 durch die Differenzengleichungen (B.49) ersetzt. Für das betrachtete Problem müssen die Koeffizienten r_1 und r_2 auf den Rändern $q = \{\underline{q} - \varepsilon_1, \bar{q} + \varepsilon_1\}$ bzw. $s = \{\underline{s}, \bar{s}\}$ den Bedingungen aus der Annahme B.3.1 genügen:

$$\begin{aligned} r_1(\underline{q} - \varepsilon_1, s) &= \frac{\partial b_1}{\partial q}(\underline{q} - \varepsilon_1, s) + a_1(\underline{q} - \varepsilon_1, s) \geq 0, \quad s \in [\underline{s}, \bar{s}], \\ r_1(\bar{q} + \varepsilon_1, s) &= \frac{\partial b_1}{\partial q}(\bar{q} + \varepsilon_1, s) + a_1(\bar{q} + \varepsilon_1, s) \leq 0, \quad s \in [\underline{s}, \bar{s}], \\ r_2(q, \underline{s}) &= \frac{\partial b_2}{\partial s}(q, \underline{s}) + a_2(q, \underline{s}) \geq 0, \quad q \in [\underline{q} - \varepsilon_1, \bar{q} + \varepsilon_1], \\ r_2(q, \bar{s}) &= \frac{\partial b_2}{\partial s}(q, \bar{s}) + a_2(q, \bar{s}) \leq 0, \quad q \in [\underline{q} - \varepsilon_1, \bar{q} + \varepsilon_1]. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Es ist leicht zu sehen, dass wegen der Definition der Koeffizienten b_1, b_2, a_1 und a_2 in (2.70) die partiellen Ableitungen $\frac{\partial b_1}{\partial q}$ und $\frac{\partial b_2}{\partial s}$ gleich null sind. Außerdem ist wegen der Eigenschaft

der Strategie $w_M(\underline{q} - \varepsilon_1, s) = w_M(\bar{q} + \varepsilon_1, s) = 0$ der Koeffizient $a_1(q, s)$ auf den Rändern $q = \{\underline{q} - \varepsilon_1, \bar{q} + \varepsilon_1\}$ ebenfalls gleich null. Die Definition des OU-Prozesses und die Auswahl der Grenzen $\underline{s} < \mu < \bar{s}$ für den Preis garantieren, dass die Ungleichungen $a_2(q, \underline{s}) = \kappa(\mu - \underline{s}) > 0$ und $a_2(q, \bar{s}) = \kappa(\mu - \bar{s}) < 0$ gelten. Somit sind die Bedingungen (2.73) für das gestellte Problem immer erfüllt.

Für die PDE (2.72) mit den obigen Randbedingungen wird in Anhang B.3.1 ein Differenzenschema (B.39), (B.49) entwickelt, welches wie folgt aufgestellt wird:

$$-(\Lambda - \rho)J_{i,j} - \mathcal{A}_\Delta(w_{M_{i,j}})J_{i,j} = F_{i,j}, \quad (2.74)$$

wobei $\mathcal{A}_\Delta(w_{M_{i,j}})J_{i,j}$ ein in (2.54) definierter, mittels der Upwind-Differenzenapproximation diskretisierter Differenzenoperator zu dem Differentialoperator $\mathcal{A}(w_M)$ ist und $F_{i,j} := F(q_i, s_j, w_{M_{i,j}})$ die Gewinnfunktion im Gitterpunkt (q_i, s_j) bezeichnet. Außerdem ist $\Lambda - \rho$ ein diskretes Analogon für den Differentialoperator $\mathcal{L} - c$ ohne $\mathcal{A}(w_M)$. Um das entstandene Differenzenschema (2.74) als lineares Gleichungssystem (B.58) darzustellen, wurden die beiden Seiten der PDE (2.72) mit dem Minuszeichen multipliziert.

Somit wird die Differenzengleichung (2.74) auf die Lösung folgenden linearen Gleichungssystems der Form

$$\mathcal{A}\mathcal{J} = \mathcal{F} \quad (2.75)$$

zurückgeführt. Dabei sind

$$\mathcal{J} = \left(\mathbf{J}_0^\top, \dots, \mathbf{J}_{N_q}^\top \right)^\top, \quad \mathbf{J}_i = \left(J_{i,0}, \dots, J_{i,N_s} \right)^\top, \quad i = 0, \dots, N_q,$$

und

$$\mathcal{F} = \left(\mathbf{F}_0^\top, \dots, \mathbf{F}_{N_q}^\top \right)^\top, \quad \mathbf{F}_i = \left(F_{i,0}, \dots, F_{i,N_s} \right)^\top, \quad i = 0, \dots, N_q,$$

der $(\tilde{N} \times 1)$ -dimensionale Lösungsvektor bzw. der Vektor der rechten Seite, sowie

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_0 & -\mathbf{B}_0 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_1 & \mathbf{C}_1 & -\mathbf{B}_1 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{A}_2 & \mathbf{C}_2 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{C}_{N_q-2} & -\mathbf{B}_{N_q-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -\mathbf{A}_{N_q-1} & \mathbf{C}_{N_q-1} & -\mathbf{B}_{N_q-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{A}_{N_q} & \mathbf{C}_{N_q} \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

die quadratische $(\tilde{N} \times \tilde{N})$ -Koeffizientenblockmatrix mit $\tilde{N} = (N_q + 1) \cdot (N_s + 1)$, wobei $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{(N_s+1) \times (N_s+1)}$ die quadratische $((N_s + 1) \times (N_s + 1))$ -Nullmatrix ist. Außerdem sind alle Matrizen \mathbf{A}_i , $i = 1, \dots, N_q$, und \mathbf{B}_i , $i = 0, \dots, N_q - 1$, diagonal und die Matrizen \mathbf{C}_i , $i = 0, \dots, N_q$, tridiagonal, wobei ihre Dimension gleich $((N_s + 1) \times (N_s + 1))$ ist.

Die ausführliche Herleitung des Differenzenschemas für die PDE (2.72) und die Bestimmung seiner Koeffizienten und der Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{C} sind in Anhang B.3.1 enthalten. Es sei

erwähnt, dass alle Koeffizienten des erhaltenen Differenzenschemas (B.39), (B.49) nichtnegativ sind, was bedeutet, dass es ein monotones Differenzenschema ist.

Gemäß Lemma B.3.3 ist die Blockmatrix \mathcal{A} in (2.76) in jedem Iterationsschritt k eine M-Matrix und somit invertierbar. Dies bedeutet, dass das Gleichungssystem (2.75) für jedes k eine eindeutige Lösung $\mathcal{J} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{F}$ hat.

Wird im Policy-Improvement-Algorithmus 1 die im Iterationsschritt enthaltene lineare PDE durch die mit Hilfe des Differenzenschemas (2.74) diskretisierte PDE (2.67) ersetzt, so ergibt sich daraus die diskretisierte Version des Verfahrens (siehe Algorithmus 2).

Algorithmus 2 Diskrete Version des Policy-Improvement-Algorithmus

1. Startnäherung: Setze $k = 0$ und wähle eine zulässige Strategie (Startnäherung)

$$w_{M_{i,j}}^{(0)} := w_M^{(0)}(q_i, s_j) \quad \text{für alle } (q_i, s_j) \in \bar{\mathcal{G}}_q \times \bar{\mathcal{G}}_s.$$

Wähle Abbruchschranken $\delta_J, \delta_u > 0$ und $k_{\max} \in \mathbb{N}$;

2. Iteration: Bestimme $J_{i,j}^{(k)} := J(q_i, s_j; w_{M_{i,j}}^{(k)})$ für alle $(q_i, s_j) \in \bar{\mathcal{G}}_q \times \bar{\mathcal{G}}_s$ als Lösung der Differenzengleichung

$$-(\Lambda - \rho)J_{i,j}^{(k)} - \mathcal{A}_\Delta(w_{M_{i,j}}^{(k)})J_{i,j}^{(k)} = F_{i,j}^{(k)} \quad (2.77)$$

mit dem in (2.54) definierten Differenzenoperator $\mathcal{A}_\Delta(w_{M_{i,j}}^{(k)})$ und die Strategie

$$w_{M_{i,j}}^{(k+1)} = \operatorname{argmax}_{y \in U_M} \left(\mathcal{A}_\Delta(y)J_{i,j}^{(k)} + F_{i,j} \right); \quad (2.78)$$

3. Abbruchkriterium: Falls für alle $(q_i, s_j) \in \bar{\mathcal{G}}_q \times \bar{\mathcal{G}}_s$

$$|J_{i,j}^{(k)} - J_{i,j}^{(k+1)}| < \delta_J \quad \text{und} \quad |w_{M_{i,j}}^{(k)} - w_{M_{i,j}}^{(k+1)}| < \delta_u, \quad \text{oder} \quad k = k_{\max},$$

dann breche ab. Sonst setze $k = k + 1$ und gehe zu Schritt 2.

2.2.4 Eigenschaften des Differenzenschemas

In Anhang B.3.1 wird gezeigt, dass das Differenzenschema (B.39), (B.49) für die Aufgaben vom Typ (2.72) mit den obigen Randbedingungen und den Koeffizienten (2.73) die zweite Approximationsordnung auf dem zweidimensionalen äquidistanten Rechtecksgitter $\bar{\mathcal{G}}$ hat. Da die Koeffizientenblockmatrix (2.76) des linearen Gleichungssystems (2.75) eine M-Matrix ist, gilt nach Theorem B.1.18 folgende Abschätzung (B.17) für ihre diskrete Maximum-Norm (siehe Anhang B.1):

$$\|\mathcal{A}^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{R(\mathcal{A})},$$

wobei $R(\mathcal{A})$ für das Problem (2.72) mit den eingeführten Randbedingungen gleich dem Diskontierungsfaktor ρ ist, d. h. $R(\mathcal{A}) = \rho$. Daraus folgt, dass das entwickelte Differenzenschema (B.39), (B.49) zur numerischen Lösung der PDE (2.67) in jedem Iterationsschritt k stabil ist, sodass Bedingung (B.18) erfüllt ist:

$$\|\mathcal{J}\|_\infty \leq \frac{1}{\rho} \|\mathcal{F}\|_\infty, \quad \rho > 0. \quad (2.79)$$

Theorem 2.2.3. *Das Differenzenschema (B.39), (B.49) für PDE (2.67) ist in jedem Iterationsschritt k stabil und konvergent mit $\mathcal{O}(|\Delta|^2)$, $|\Delta|^2 = \Delta_q^2 + \Delta_s^2$.*

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zum Beweis für das Theorem B.3.4 in Anhang B.3.1. Das Differenzenschema besitzt die quadratische Approximationsordnung und ist in Hinblick auf die Abschätzung (2.79) stabil und die Koeffizientenblockmatrix \mathcal{A} ist eine M-Matrix. Damit hat das lineare Gleichungssystem (2.75) eine eindeutige Lösung und das Differenzenschema (B.39), (B.49) ist konvergent mit $\mathcal{O}(|\Delta|^2)$, $|\Delta|^2 = \Delta_q^2 + \Delta_s^2$. \square

Somit ist bewiesen, dass das entwickelte Differenzenschema für die PDE (2.67) konsistent ist. Außerdem folgt aus der Monotonieeigenschaft und der Konsistenz des aufgestellten Differenzschemas seine Stabilität in der diskreten Maximum-Norm zusammen mit der Abschätzung (2.79).

Man kann auch zeigen, dass die für das Policy-Improvement-Verfahren typische Eigenschaft der Verbesserung der Zielfunktion in jedem Iterationsschritt erhalten bleibt, wenn die Differenzengleichung (2.77) näherungsweise gelöst wird.

Theorem 2.2.4 (Monotonie der diskreten Version des Policy-Improvement-Algorithmus 2). *Ist $w_{M_{i,j}}^{(0)}$ eine beliebige zulässige Anfangsstrategie, dann haben die nach dem Policy-Improvement-Algorithmus 2 erhaltenen Lösungen $\mathcal{J}^{(k)}$ folgende Monotonieeigenschaft:*

$$\mathcal{J}^{(k+1)} \geq \mathcal{J}^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Beweis. Die Differenzengleichung (2.77) wird auf die Lösung folgenden linearen Gleichungssystems

$$\mathcal{A}^{(k)} \mathcal{J}^{(k)} = \mathcal{F}^{(k)} \quad (2.80)$$

zurückgeführt. In (2.80) steht die Blockmatrix $\mathcal{A}^{(k)}$ für die linke Seite der Gleichung (2.77) und die rechte Seite $\mathcal{F}^{(k)}$ für die diskretisierte Gewinnfunktion $F_{i,j}^{(k)}$.

Es ist bekannt, dass nach Lemma B.3.3 die Blockmatrix $\mathcal{A}^{(k)}$ in (2.80) für alle Iterationsschritte k eine M-Matrix ist. Somit gilt $(\mathcal{A}^{(k)})^{-1} \geq 0$ nach Bemerkung B.1.17. Dies erlaubt, für jeden Iterationsschritt k aus dem Gleichungssystem (2.80) folgende Beziehung herzuleiten:

$$\mathcal{A}^{(k+1)}(\mathcal{J}^{(k+1)} - \mathcal{J}^{(k)}) = \mathcal{F}^{(k+1)} - \mathcal{A}^{(k+1)}\mathcal{J}^{(k)}.$$

Daraus folgt, dass

$$\mathcal{J}^{(k+1)} - \mathcal{J}^{(k)} = (\mathcal{A}^{(k+1)})^{-1}(\mathcal{F}^{(k+1)} - \mathcal{A}^{(k+1)}\mathcal{J}^{(k)}).$$

Um zu beweisen, dass $\mathcal{J}^{(k+1)} \geq \mathcal{J}^{(k)}$ ist, muss man zeigen, dass $\mathcal{A}^{(k+1)}\mathcal{J}^{(k)} \leq \mathcal{F}^{(k+1)}$ gilt, da $(\mathcal{A}^{(k)})^{-1}$ nichtnegative Elemente hat.

Im Policy-Improvement-Algorithmus 2 wird die neue Strategie $w_{M_{i,j}}^{(k+1)}$ mit der im k -ten Iterationsschritt berechneten Funktion $\mathcal{J}^{(k)}$ gemäß (2.78) bestimmt. Somit gilt in jedem Gitterpunkt $(q_i, s_j) \in \bar{\mathcal{G}}_q \times \bar{\mathcal{G}}_s$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\Delta(w_{M_{i,j}}^{(k+1)})\mathcal{J}_\Delta^{(k)}(q_i, s_j) + F(q_i, s_j, w_{M_{i,j}}^{(k+1)}) \\ = \max_{y \in \mathcal{U}_M} \left(\mathcal{A}_\Delta(y)\mathcal{J}_\Delta^{(k)}(q_i, s_j) + F(q_i, s_j, y) \right). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Dann bekommt man für die Strategie $w_{M_{i,j}}^{(k)}$ zusammen mit der Beziehung (2.81) folgende Ungleichung für alle $(q_i, s_j) \in \bar{\mathcal{G}}_q \times \bar{\mathcal{G}}_s$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\Delta(w_{M_{i,j}}^{(k+1)})\mathcal{J}_\Delta^{(k)}(q_i, s_j) + F(q_i, s_j, w_{M_{i,j}}^{(k+1)}) \geq \\ \mathcal{A}_\Delta(w_{M_{i,j}}^{(k)})\mathcal{J}_\Delta^{(k)}(q_i, s_j) + F(q_i, s_j, w_{M_{i,j}}^{(k)}). \end{aligned} \quad (2.82)$$

Wenn man in die Differenzengleichung (2.77) anstelle $w_{M_{i,j}}^{(k)}$ die Strategie $w_{M_{i,j}}^{(k+1)}$ einsetzt, kann man mit Hilfe der Bedingung (2.82) feststellen, dass folgende Ungleichung für alle $(q_i, s_j) \in \bar{\mathcal{G}}_q \times \bar{\mathcal{G}}_s$ gilt:

$$-(\Lambda - \rho)J_{i,j}^{(k)} - \mathcal{A}_\Delta(w_{M_{i,j}}^{(k+1)})J_{i,j}^{(k)} \leq F_{i,j}^{(k+1)} \quad (2.83)$$

bzw. in der Matrix-Vektor-Form gilt $\mathcal{A}^{(k+1)}\mathcal{J}^{(k)} \leq \mathcal{F}^{(k+1)}$.

□

Zur Illustration der in Kapitel 1 enthaltenen theoretischen Resultate zu den stochastischen Optimalsteuerungsproblemen für Energiespeicher werden nun einige numerische Ergebnisse präsentiert. Hierfür werden die in Kapitel 2 bereitgestellten numerischen Verfahren zur Lösung der HJB-Gleichung eingesetzt.

Für ausgewählte Parameter eines Modells für einen Pumpspeicher und einen als Markov-modulierten OU-Prozess beschriebenen Energiepreis werden die Wertfunktion und die optimale Speicherstrategie für das regularisierte Steuerungsproblem sowohl mit endlichem als auch unendlichem Zeithorizont berechnet. Dabei werden die Ergebnisse für unterschiedliche Regularisierungsparameter mit denen für das unregularisierte Problem verglichen, um die in Abschnitt 1.3.3 erhaltenen Konvergenzaussagen zu illustrieren.

In einer Reihe von Fallstudien wird weiterhin die Sensitivität der Wertfunktion und der optimalen Steuerung hinsichtlich der Variation ausgewählter Parameter untersucht. Schließlich erfolgt eine Gegenüberstellung von Ergebnissen, die mit der Methode des Policy-Improvement als Alternative zur Semi-Lagrange-Methode erhalten werden.

3.1 Modell- und Diskretisierungsparameter

Das Modell für die nachfolgenden numerischen Experimente zur optimalen Steuerung eines Pumpspeichers ist gekennzeichnet durch einen Energiepreis S , welcher durch einen Markov-modulierten OU-Prozess in der Form (1.16) beschrieben wird. Die Parameter dieses Preismodells sind in Tabelle 3.1 gegeben.

Diese Parameter beschreiben einen Energiemarkt mit $d = 2$ Zuständen, zwischen denen im Mittel einmal im Jahr ein Wechsel erfolgt ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$). Der erste Zustand ist durch ein höheres mittleres Preisniveau $\mu_1 = 50$ und ein langsames Zurücktreiben ($\kappa_1 = 10$) zu diesem Mittelwert gekennzeichnet. Dies ist mit einer größeren Streuung der Energiepreise verbunden (welche beim OU-Prozess von der Größe $\sigma^2/2\kappa$ abhängt).

Tabelle 3.1: Parameter des Preismodells.

Parameter	Wert
Volatilität	$\sigma = 50$
Anzahl der Zustände	$d = 2$
Gleichgewichtsniveaus	$\mu_1 = 50, \quad \mu_2 = 30$
Steifigkeiten	$\kappa_1 = 10, \quad \kappa_2 = 20$
Intensitäten	$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1$

Der Einfachheit halber wird ein Modell ohne Zufluss Z betrachtet, d.h. Änderungen des Füllstandes Q werden lediglich durch Pumpen und Ablassen mit der zu wählenden Rate des Volumenstromes u (Steuerung) bewirkt. Damit ergibt sich ein stochastisches Optimalsteuerungsproblem mit einem dreidimensionalen Zustand $X = (Q, S, \Pi)^\top$. Die technisch-physikalischen Parameter des Pumpspeichers sind in Tabelle 3.2 gegeben. Sie sind so gewählt, dass die Positivitätsbedingung (1.35) für den Wirkungsgrad η_{turb} der Turbine und die sich daraus ergebende Beschränkung (1.36) für die maximale Füllhöhe \bar{q} erfüllt sind.

Tabelle 3.2: Parameter des Pumpspeichers.

Parameter	Bezeichnung	Wert	Einheit
\underline{q}	minimale Füllhöhe	100	m
\bar{q}	maximale Füllhöhe	150	m
A_S	Querschnittsfläche des oberen Speicherbeckens	10^7	m ²
A_{out}	Querschnittsfläche der Ausströmöffnung	π	m ²
q_f^+	Verlusthöhe beim Ablassen	6	m
q_f^-	Verlusthöhe beim Pumpen	4	m
η_{max}	maximaler erreichbarer Wirkungsgrad der Turbine	0.85	
P_{theo}	theoretische Leistung der Turbine	200	MW
η_{pump}	Wirkungsgrad der Pumpe	0.75	
P_{pump}	Nennleistung der Pumpe	100	MW
g	Erdbeschleunigung	9.81	m/s ²
ρ_w	Dichte des Wassers	1000	kg/m ³

Das Optimierungsproblem wird sowohl für einen endlichen Zeithorizont $T = 1$ Jahr als auch für einen unendlichen Zeithorizont $T = \infty$ betrachtet. Die Diskontierungsrate ist $\rho = 0.05$. Die für das vollständige Befüllen bzw. Entleeren des Speichers benötigte Zeit beträgt unter Ver-

wendung der der Tabelle 3.2 entnommenen Parameter 97.65 bzw. 37.39 Tage. Für das Problem mit endlichem Zeithorizont werden für die Endauszahlungsfunktion Φ die in Abschnitt 1.1.3 betrachteten Fälle des wertlosen Verfalls ($\Phi = 0$), der Pumpspeicherauflösung mit Liquidationspreis $h_L(s) = 0.8 \cdot s$ und der Strafzahlung bei Unterschreitung der Mindestreserve $q_P = 125$ und mit Strafpriß $h_P(s) = 1.2 \cdot s$ analysiert. Zur Befüllung des Speichers bis auf die Mindestreserve $q_P = 125$ bzw. zur Entleerung des Speichers von der Mindestreserve werden 44.09 bzw. 17.75 Tage benötigt. Abbildung 3.1 zeigt die in den Beispielen 1.1.11 und 1.1.12 berechneten Funktionen Φ für die Pumpspeicherauflösung und die Strafzahlung.

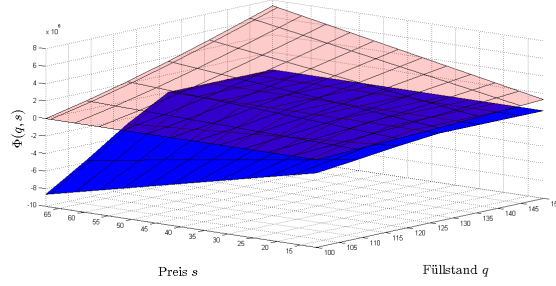


Abbildung 3.1: Die Endauszahlungsfunktionen $\Phi(q, s)$: Pumpspeicherauflösung (rosa) und Strafzahlung (blau).

Für die Regularisierung der Zustandsgleichung werden die in Tabelle 3.3 gegebenen Parameter verwendet. Somit werden die zusätzlichen Wiener-Prozesse in den SDEs für den Füllstand ${}^m Q$ und den Filter ${}^m \Pi$ mit $\frac{\gamma_q}{\sqrt{m}} = 10^{-4}$ und $\frac{\gamma_\pi}{\sqrt{m}} = 10^{-4}$ skaliert. Der Driftkoeffizient $\tilde{\psi}$ in der Füllstandsgleichung ist außerhalb des Intervalls $(\underline{q} - \varepsilon_q, \bar{q} + \varepsilon_q) = (95, 155)$ gleich Null. Die vom Filter ${}^m \Pi$ abhängigen Koeffizienten $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{a}_S$ sind für Werte von ${}^m \Pi$ außerhalb $(-\varepsilon_\pi, 1 + \varepsilon_\pi) = (-0.1, 1.1)$ ebenfalls gleich Null.

Tabelle 3.3: Regularisierungsparameter.

m	γ_q	γ_π	ε_q	ε_π
10^8	1	1	5	0.1

Für die numerische Lösung der HJB-Gleichung ist der unbeschränkte Zustandsraum \mathcal{X} auf ein geeignetes beschränktes Berechnungsgebiet \mathcal{X}^D abzuschneiden. Im Modell ohne Regularisierung ist $\mathcal{X} = \mathcal{Q} \times \mathcal{S} \times \mathcal{P} = [100, 150] \times \mathbb{R} \times [0, 1]$. Hier wird der Wertebereich $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ des Preisprozesses durch ein abgeschlossenes Intervall $\mathcal{S}^D := [\underline{s}, \bar{s}]$ ersetzt, dessen Grenzen sich aus der k - σ -Regel mit $k = 3$ ergeben zu

$$[\underline{s}, \bar{s}] = \left[\min\left(\mu_1 - 3\frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa_1}}, \mu_2 - 3\frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa_2}}\right), \max\left(\mu_1 + 3\frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa_1}}, \mu_2 + 3\frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa_2}}\right) \right].$$

Für die gewählten Parameter ergibt sich nach Runden $\mathcal{S}^D = [6, 84]$ und somit das Berechnungsgebiet $\mathcal{X}^D = [100, 150] \times [6, 84] \times [0, 1]$ für den Zustand X .

Für das regularisierte System ist $\tilde{\mathcal{X}} = \mathbb{R} \times \mathcal{S} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ auf ein beschränktes Berechnungsgebiet in der Form $\tilde{\mathcal{X}}^D = \tilde{\mathcal{Q}}^D \times \tilde{\mathcal{S}}^D \times \tilde{\mathcal{P}}^D$ mit $\tilde{\mathcal{Q}}^D = [\underline{q} - \varepsilon_1, \bar{q} + \varepsilon_1]$, $\tilde{\mathcal{S}}^D = \mathcal{S}^D = [s, \bar{s}]$ und $\tilde{\mathcal{P}}^D = [\underline{\pi}, \bar{\pi}]$, $\underline{\pi} = -\varepsilon_2$, $\bar{\pi} = 1 + \varepsilon_2$, abzuschneiden. Die Parameter ε_1 und ε_2 sind so zu wählen, dass $\tilde{\mathcal{Q}}^D$ und $\tilde{\mathcal{P}}^D$ die Bereiche, in denen die Koeffizienten $\tilde{\psi}$, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ und \tilde{a}_S der regularisierten Zustandsgleichung nicht verschwinden, enthalten. Dies wird durch $\varepsilon_1 > \varepsilon_q$ und $\varepsilon_2 > \varepsilon_\pi$ erreicht, konkret wird $\varepsilon_1 = 10$ und $\varepsilon_2 = 0.2$ gesetzt.

Für die numerische Lösung des Optimierungsproblems mit endlichem Zeithorizont ist das Berechnungsgebiet $[0, T] \times \mathcal{X}^D$ bzw. $[0, T] \times \tilde{\mathcal{X}}^D$ und im Fall mit unendlichem Zeithorizont ist \mathcal{X}^D bzw. $\tilde{\mathcal{X}}^D$ zu diskretisieren. Tabelle 3.4 zeigt die gewählten Diskretisierungsparameter.

Tabelle 3.4: Diskretisierungsparameter.

		vollständiges Gitter		abgeschnittenes Gitter	
Variable	Schrittweite	Gebiet	Teilintervalle	Gebiet	Teilintervalle
Zeit $\tau = T - t$	$\Delta_\tau = 1/(2 \cdot 365)$ = 12 Stunden	$[0, 1]$	$N_\tau = 730$		
Füllstand q	$\Delta_q = 1$	$[90, 160]$	$N_q = 70$	$[100, 150]$	$N_q = 50$
Energiepreis s	$\Delta_s = 0.5$	$[6, 84]$	$N_s = 156$		
Filter π	$\Delta_\pi = 0.02$	$[-0.2, 1.2]$	$N_\pi = 70$	$[0, 1]$	$N_\pi = 50$

Während für das regularisierte System auch Werte des Füllstandes und des Filters außerhalb der Gebiete $\mathcal{Q} = [q, \bar{q}]$ und $\mathcal{P} = [0, 1]$ betrachtet werden müssen, interessieren in den Anwendungen die Wertfunktion und die optimale Steuerung nur für $(q, \pi) \in \mathcal{Q} \times \mathcal{P}$. Daher werden nachfolgend die Ergebnisse wahlweise für Werte des Zustandes sowohl aus dem „vollständigen“ Gitter des Gebietes $\tilde{\mathcal{X}}^D = \tilde{\mathcal{Q}}^D \times \tilde{\mathcal{S}}^D \times \tilde{\mathcal{P}}^D$ als auch aus dem „abgeschnittenen“ Gitter für das Gebiet $\mathcal{X}^D = \mathcal{Q} \times \mathcal{S}^D \times \mathcal{P}$ gezeigt.

3.2 Endlicher Zeithorizont

In diesem Abschnitt werden numerische Ergebnisse für das stochastische regularisierte Optimalsteuerungsproblem mit endlichem Zeithorizont für das in Abschnitt 3.1 beschriebene Modell vorgestellt. Zur numerischen Lösung dieses regularisierten Problems wurde in Abschnitt 2.1.5 das explizit-implizite Differenzenschema entwickelt. Dank der in Abschnitt 1.3 dargestellten Regularisierung ist für die dem Steuerungsproblem zugeordnete HJB-Gleichung die Elliptizitätsbedingung für den Diffusionsteil des Differentialoperators erfüllt. Somit kann die Existenz einer eindeutigen klassischen Lösung gesichert werden. Zunächst werden Ergebnisse für den Regularisierungsparameter $m = 10^8$ gezeigt, für den die Füllstands- und Filtergleichung nur sehr schwach gestört sind. Zur Illustration der in Abschnitt 1.3 präsentierten Konvergenzaussagen für $m \rightarrow \infty$ erfolgt anschließend ein Vergleich der Ergebnisse nach dem explizit-impliziten Differenzenschema für unterschiedliche m mit der numerischen Lösung der HJB-Gleichung für

das unregularisierte Problem, welches mittels des in Abschnitt 2.1.3 entwickelten impliziten Semi-Lagrange-Approximationsschemas gelöst wird.

Die folgenden Abbildungen zeigen die Abhängigkeit der Wertfunktion V^m und der optimalen Steuerung $w^m := {}^m w_M^*$ von den Zustandsvariablen q, s, π und der Zeit t . Zunächst wird für fixiertes $t_0 = 0$ und $\pi_0 = 0.5$ in Abbildung 3.2 die Abhängigkeit vom Füllstand q und vom Energiepreis s untersucht. Der obere Teil der Abbildung 3.2 zeigt V^m und w^m für Werte des Füllstandes q aus dem gesamten Berechnungsgebiet $\tilde{Q}^D = [\underline{q} - \varepsilon_1, \bar{q} + \varepsilon_1] = [90, 160]$, welches wegen der Regularisierung größer als der eigentlich interessierende Bereich $Q = [\underline{q}, \bar{q}] = [100, 150]$ ist. Die entsprechende Einschränkung auf diesen Bereich ist im unteren Teil von Abbildung 3.2 zu sehen.

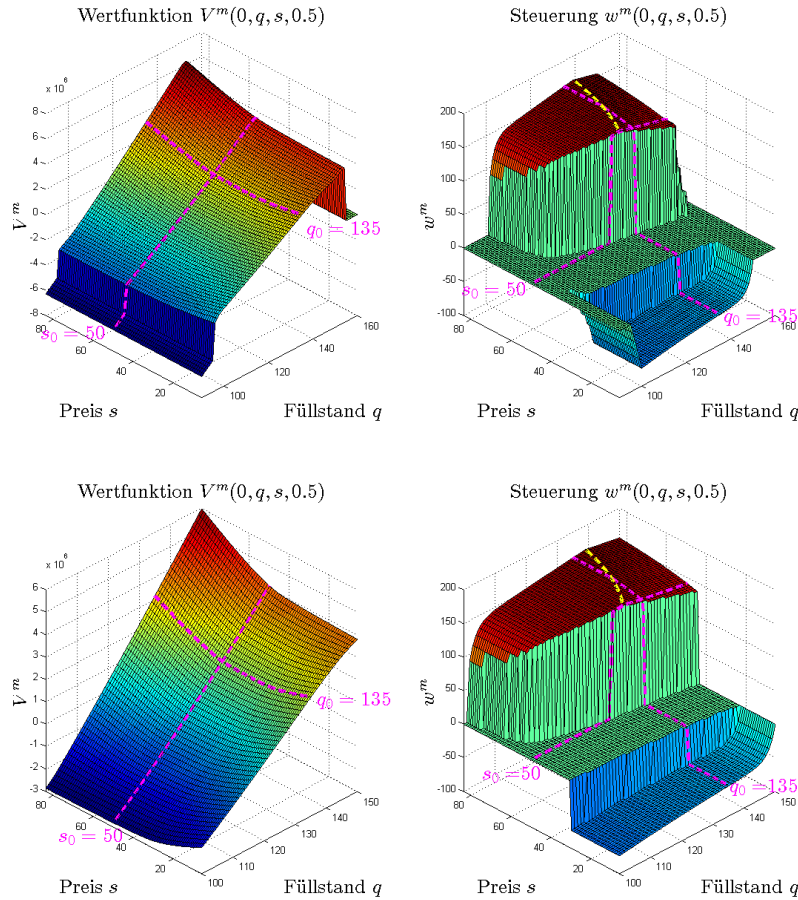


Abbildung 3.2: Wertfunktion und optimale Steuerung in Abhängigkeit vom Füllstand q und Energiepreis s für fixierte $t_0 = 0$ und $\pi_0 = 0.5$: $q \in \tilde{Q}^D = [\underline{q} - \varepsilon_1, \bar{q} + \varepsilon_1]$ (oben) und $q \in Q = [\underline{q}, \bar{q}]$ (unten).

Das Bild oben rechts zeigt, dass wegen der Konstruktion der Menge U_M der zulässigen Steuerungswerte für $q \leq \underline{q} - \varepsilon_q = 95$ und $q \geq \bar{q} + \varepsilon_q = 155$ die einzige zulässige Steuerung

$y = 0$ („Warten“) ist. Dies bewirkt das im Bild oben links zu sehende starke Absinken der Wertfunktion außerhalb von $[q, \bar{q}]$. Diese Effekte sind allerdings für Anwendungen irrelevant, da dort nur der Verlauf von V^m und w^m für $[q, \bar{q}]$ interessiert, welcher in den beiden unteren Bildern dargestellt ist. Dort ist gut zu erkennen, dass der Wert des Speichers am kleinsten ist, wenn er leer ist und der Energiepreis am größten ist. Die größten Werte werden für einen vollen Speicher und maximale Energiepreise erreicht. Bezüglich des Füllstandes q ist die Wertfunktion wachsend. Dies war zu erwarten, denn je mehr Wasser sich im oberen Speicherbecken des Pumpspeichers befindet, umso mehr Energie ist gespeichert und umso größer ist der ökonomische Wert des Speichers. Mit der gewählten Endbedingung werden zur Zeit T Strafzahlungen fällig, falls der Speicher nicht ausreichend gefüllt ist, d.h. der Füllstand den vereinbarten Wert $q_P = 125$ unterschreitet. Dies bewirkt, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Wertfunktion für sehr kleine Füllstände negativ ist. Übernimmt der Speichermanager zum Zeitpunkt $t = 0$ einen fast leeren Speicher, so entstehen ihm für das Auffüllen auf einen Mindestfüllstand q_P Kosten, welche er durch die Erlöse aus dem Energieverkauf bis zum Zeitpunkt T nicht mehr decken kann.

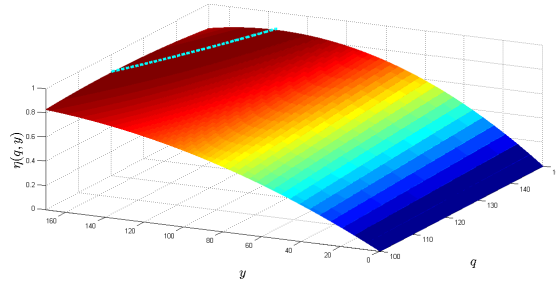
Das Monotonieverhalten der Wertfunktion bezüglich des Energiepreises s ist uneinheitlich und hängt vom Füllstand q ab. Ist der Speicher zu Beginn über die Mindestreserve q_P gefüllt, so können durch den Verkauf von Energie Gewinne realisiert werden, welche proportional zum Energiepreis steigen. Umgekehrt, wenn zu Beginn der Speicher fast leer ist, entstehen wie bereits oben beschrieben wegen der Strafzahlung am Ende des Handelszeitraumes Kosten für das Auffüllen auf den Mindestfüllstand. Diese Kosten steigen mit dem Energiepreis und senken entsprechend den Wert des Speichers.

Die Darstellung der optimalen Speicherstrategie zeigt deutlich deren Bang-Bang-Struktur (siehe (1.92)). Es erfolgt sprunghaft ein Umschalten zwischen den drei Grundzuständen „Kaufen/Pumpen“ (blau), „Warten“ (grün) und „Verkaufen/Ablassen“ (rot). Für niedrige Energiepreise wird Energie gekauft und Wasser mit der maximal möglichen Rate des Volumenstromes in das obere Speicherbecken gepumpt. Steigt der Energiepreis über den vom Füllstand abhängigen kritischen Preis $S_P \approx 25$, dann besteht die optimale Strategie im „Warten“. Erreicht der Energiepreis den kritischen Wert $S_A^a \approx 45$, so wird Wasser abgelassen und die mit der Turbine erzeugte Energie verkauft. Dabei wird für kleinere Füllstände $q < q_1^* \approx 129$ mit der maximalen Rate des Volumenstromes $\bar{u}(q)$ abgelassen. Überschreitet der Füllstand q_1^* , so ist es nun optimal mit der „effektiven“ Rate $y_+ = y_+(t, q, s, \pi) < \bar{u}(q)$ Wasser abzulassen, solange der Energiepreis unter dem von q abhängigen Preis S_A^b (gelbe Kurve) bleibt. Lediglich für sehr hohe Preise $s > S_A^b$ wird wieder das Ablassen mit der maximalen Rate $\bar{u}(q)$ optimal. Für sehr große Füllstände $q > q_2^* \approx 139$ ist dagegen die „effektive“ Rate y_+ für alle Preise $s > S_A^a$ optimal.

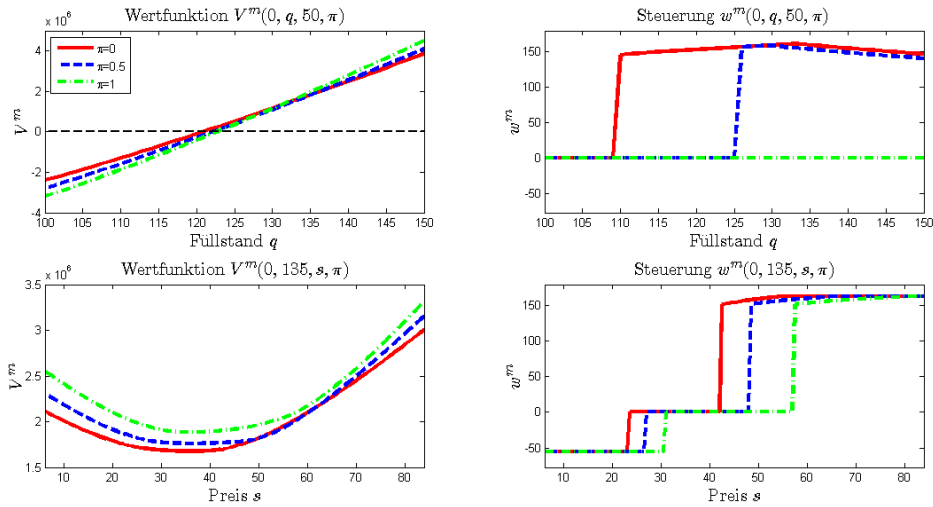
Diese Effekte sind eine Folge des vom Füllstand q und von der Steuerung y abhängigen Wirkungsgrades η_{turb} der Turbine, welcher als quadratische Funktion von qy modelliert wurde und für wachsende qy nach Erreichen der Maximumstelle wieder sinkt. Die blaue punktierte Linie in Abbildung 3.3 zeigt den maximalen Wirkungsgrad der Turbine.

Nachdem die Abhängigkeit der Wertfunktion und der optimalen Steuerung vom Füllstand und Energiepreis betrachtet wurden, sollen nun auch die bislang fixierten Werte für den Filter und die Zeit variiert werden.

Um die Abhängigkeit vom Filter π zu analysieren, sind in Abbildung 3.4 für drei verschiedene Werte $\pi \in \{0, 0.5, 1\}$ die Funktionen V^m und w^m in Abhängigkeit vom Füllstand q für


 Abbildung 3.3: Wirkungsgrad der Turbine $\eta_{\text{turb}}(q, y)$.

fixiertes $s = s_0$ (oben) und in Abhängigkeit vom Preis s für fixiertes $q = q_0$ (unten) gezeichnet. Die Zeit bleibt weiterhin bei $t = t_0 = 0$ fixiert. Für den bislang fixierten Wert des Filters $\pi = \pi_0 = 0.5$ herrscht maximale Ungewissheit über den momentanen Zustand der Markov-Kette Y . Dagegen verfügt der Speichermanager für $\pi \in \{0, 1\}$ zum Startzeitpunkt $t_0 = 0$ über vollständige Information über den Zustand von Y . Für $\pi = 1$ ist der Markt mit Sicherheit im ersten Zustand mit dem höheren Gleichgewichtsniveau $\mu_1 = 50$ und der kleineren Steifigkeit $\kappa_1 = 10$. Dagegen ist für $\pi = 0$ mit Wahrscheinlichkeit 1 der Zustand mit dem kleineren $\mu_2 = 30$ und dem größeren $\kappa_2 = 20$ der tatsächliche Zustand.


 Abbildung 3.4: Wertfunktion und optimale Steuerung als Funktionen des Füllstandes q (oben) und des Energiepreises s (unten) für unterschiedliche $\pi \in \{0, 0.5, 1\}$ und fixierte $t_0 = 0$, $q_0 = 135$ und $s_0 = \mu_1$.

Der Speichermanager kennt zusammen mit den Modellparametern auch die Intensitäten $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ der Markov-Kette. Diese besagen, dass die Verweilzeiten in den beiden Zuständen

exponentialverteilte Zufallsgrößen mit den Mittelwerten $1/\lambda_1 = 1/\lambda_2 = 1$ Jahr sind. Der momentane Marktzustand wird also im Mittel ein Jahr andauern, bevor er in den anderen Zustand wechselt. Mit Blick auf die gewählte Länge des Zeithorizontes von $T = 1$ kann der Manager für $\pi = 1$ davon ausgehen, dass die Energiepreise mit hoher Wahrscheinlichkeit noch längere Zeit, möglicherweise die gesamte Zeitspanne bis T , um das höhere Gleichgewichtsniveau $\mu_1 = 50$ schwanken. Für $\pi = 0$ kann er dagegen niedrigere Preise erwarten, welche um $\mu_2 = 30$ schwanken. Allgemeiner ausgedrückt, deuten größere $\pi \in [0, 1]$ eher auf den ersten Zustand und damit auf höhere (aber auch volatilere) zukünftige Energiepreise hin.

Die Darstellung von V^m als Funktion von q (siehe Abbildung 3.4, oben links) zeigt, dass V^m für kleine q in π fallend und für große q in π wachsend ist. Dies erklärt sich aus den für große π höheren erwarteten zukünftigen Energiepreisen. Ist der Speicher gut gefüllt (q ist groß), so sind höhere Gewinne aus dem Verkauf von Energie zu erwarten, welche zu einer größeren Wertfunktion führen. Umgekehrt verursachen höhere Energiepreise bei einem fast leeren Speicher (q ist klein) höhere Kosten wegen der zur Zeit T fälligen Strafzahlung für $q < q_P$, somit sinkt die Wertfunktion.

Ein Blick auf die optimale Steuerung in Abhängigkeit vom Füllstand q (siehe Abbildung 3.4, oben rechts) zeigt, dass es bei einem Preis von $s_0 = \mu_1 = 50$ optimal ist, zu warten und Energie nur zu verkaufen, wenn der Füllstand über einem kritischen Füllstand liegt, welcher mit π wächst. Für kleine π ist der Zustand mit dem Gleichgewichtspreis $\mu_2 = 30 < s_0$ und der geringeren Volatilität mehr wahrscheinlich. Dies deutet auf eher fallende Preise hin. Daher sollte Energie verkauft werden, um von den momentan noch hohen Preisen zu profitieren und um den geleerten Speicher nach dem Preisabfall wieder günstig zu befüllen. Große π , insbesondere $\pi = 1$, deuten auf den ersten Marktzustand hin, bei denen die Preise um $\mu_1 = 50$ schwanken. Da der gegenwärtige Preis s_0 mit diesem Gleichgewichtsniveau übereinstimmt, sollte der Manager mit dem Verkauf von Energie daher warten, bis der Preis schwankungsbedingt ein noch höheres Niveau erreicht hat.

Der untere Teil von Abbildung 3.4 zeigt V^m und w^m in Abhängigkeit vom Energiepreis s für fixierten Füllstand $q_0 = 135$ und fixierte Zeit $t_0 = 0$. Es ist zu erkennen, dass für Energiepreise unter $\mu_2 = 30$ Energie gekauft und der Speicher gefüllt und für Preise über $\mu_1 = 50$ verkauft und der Speicher entleert wird. Dabei verschieben sich die kritischen Preise S_P , S_A^a und S_A^b für wachsende π in Richtung höherer Preise. Dies ist auch gut in Abbildung 3.5 oben links zu erkennen. Für größeres π ist der Speichermanager bereit, den Kauf von Energie und das Befüllen des Speichers erst bei einem entsprechend höheren kritischen Preis S_P einzustellen, da er einen gewinnbringenden Verkauf bei noch höheren zukünftigen Preisen erwartet. Außerdem beginnt er den Energieverkauf erst bei einem entsprechend höheren Preis S_A^a , da die Preise eher auf hohem Niveau verbleiben werden. Für einen Füllstand $q_0 \leq q_1^* \approx 129$ verkauft er mit der maximalen Rate $\bar{u}(q_0)$ und für $q_0 > q_1^*$ zunächst mit der „effektiven“ Rate y_+ . Erst wenn die Preise die Grenze S_A^b übersteigen, erfolgt der Verkauf mit maximaler Rate $\bar{u}(q_0)$.

Nun soll die optimale Steuerung w^m in Abhängigkeit von der Zeit t , welche bisher stets auf $t_0 = 0$ fixiert war, betrachtet werden. Abbildung 3.5 zeigt oben rechts und im unteren Teil die optimale Steuerung w^m als Funktion der Zeit t und des Energiepreises s für fixiertes $\pi_0 = 0.5$ und Füllstände $q_0 = 135, 125$ und 115 . Es sei daran erinnert, dass zur Zeit T , d.h. am Ende des Handelszeitraumes, eine Strafzahlung fällig wird, falls der Füllstand $q_P = 125$ unterschritten

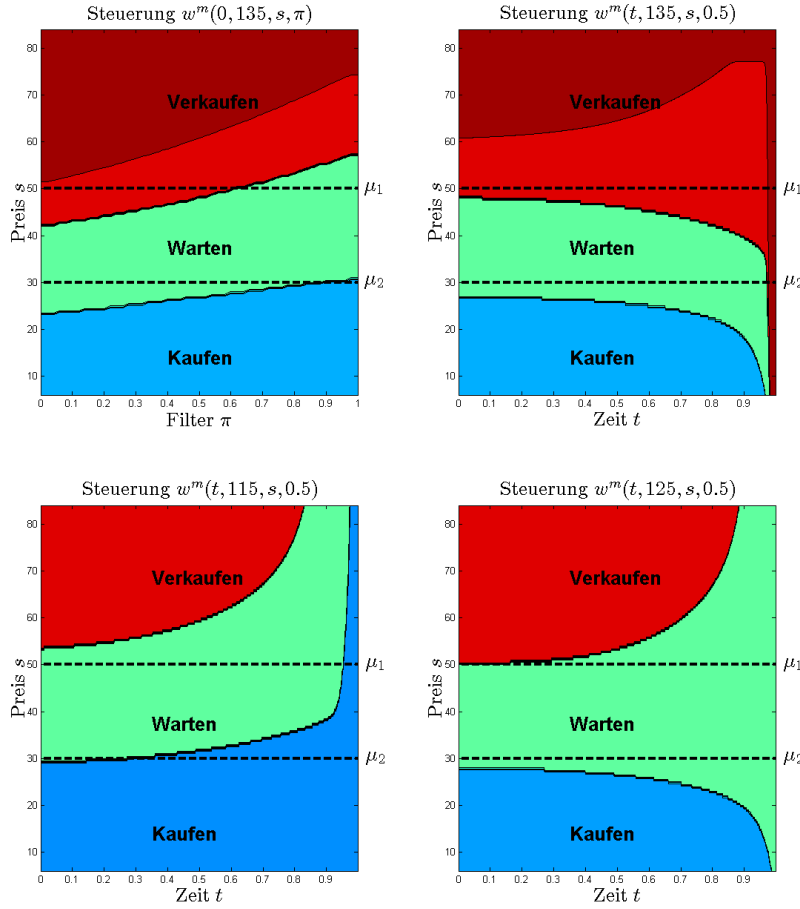


Abbildung 3.5: Optimale Steuerung für $q_0 = 135$ mit fixiertem $t_0 = 0$ (oben links) bzw. $\pi_0 = 0.5$ (oben rechts), sowie für $q_0 = 115$ (unten links) und $q_0 = 125$ (unten rechts) mit fixiertem $t_0 = 0$.

wird. Die Höhe der Strafe ergibt sich aus den Kosten für das Auffüllen des Speichers bis zum Füllstand q_P , wobei ein erhöhter Energiepreis $h_P(S_T) = 1.2 \cdot S_T$ berechnet wird. Ein Speicherinhalt über der geforderten Mindestreserve wird dagegen nicht vergütet. Kurz vor Erreichen des Endzeitpunktes T zeigt die optimale Steuerung je nach Füllstand ein völlig unterschiedliches Verhalten. Für $q_0 = 135 > q_P$ wird Energie unabhängig vom Energiepreis mit maximaler Rate verkauft, da sie anderenfalls wertlos verfällt. Ist die Mindestreserve mit $q_0 = 115 < q_P$ dagegen noch nicht erreicht, so wird unabhängig vom Preis s mit maximaler Rate gekauft, da sonst ein erhöhter Energiepreis $h_P(S_T) = 1.2 \cdot S_T$ für das Nachfüllen bezahlt werden muss. Ist dagegen mit $q_0 = q_P = 125$ die Mindestreserve bereits erreicht, so wird kurz vor T weder gekauft noch verkauft. Zusätzlich gekaufte Energie würde wertlos verfallen. Bei einem Entleeren des Speichers auf einem Füllstand unter q_P , decken die Erlöse aus dem Energieverkauf nicht die Kosten für das Wiederauffüllen. Dies liegt an den „Transaktionskosten“, die sich aus den

Wirkungsgraden von Turbine und Pumpe, der Rohreibung und einer möglichen Strafzahlung ergeben. In Abbildung 3.5 ist auch gut zu erkennen, dass für Füllstände $q > q_1^* \approx 129$ und Energiepreise $s > S_A^a$ es zunächst optimal ist, Energie mit der „effektiven“ Rate y_+ anstelle der maximalen Rate $\bar{u}(q)$ (hellroter Bereich) zu verkaufen. Erst für sehr große Energiepreise, die den kritischen Energiepreis S_A^b übersteigen, wird mit maximaler Rate (dunkelroter Bereich) verkauft. Diese Unterscheidung entfällt für die im unteren Teil von Abbildung 3.5 betrachteten Füllstände $q_0 = 115$ und 125 , da diese kleiner als q_1^* sind. Hier wird bei Energiepreisen über dem kritischen Preis S_A^a sofort mit maximaler Rate verkauft.

Am Ende dieses Abschnittes sollen Regularisierungseffekte untersucht werden. Hierzu wird das betrachtete stochastische Optimalsteuerungsproblem für verschiedene Werte des Regularisierungsparameters m gelöst. Um die in Abschnitt 1.3.3 erhaltenen Konvergenzaussagen für $m \rightarrow \infty$ zu illustrieren und um einen Eindruck von der Konvergenzgeschwindigkeit zu erhalten, erfolgt ein Vergleich der erhaltenen Wertfunktionen V^m und optimalen Steuerungen w^m . In diesen Vergleich einbezogen wird auch die numerische Lösung der degenerierten HJB-Gleichung (1.84) für die Wertfunktion V des Originalproblems ohne Regularisierung. Hierfür kommt die Semi-Lagrange-Methode zum Einsatz, die in Abschnitt 2.1.3 beschrieben wird. Der Unterschied zu dem in Abschnitt 2.1.3 entwickelten ISLAS (2.32) besteht darin, dass die SDE für den Filter nicht regularisiert wird. Zudem gelten $\tilde{\alpha} = \alpha$, $\tilde{\beta} = \beta$ und $\tilde{a}_S = \hat{a}_S$ für die Koeffizienten der Preis- und Filtergleichung. Außerdem sind für den Fall der unregularisierten Filtergleichung die Bedingungen (2.13) erfüllt, welche für die Stabilität und die Monotonie des Differenzenschemas sorgen. Das Berechnungsgebiet für π ist nun das Intervall $\mathcal{P} = [0, 1]$, welches bei der Diskretisierung in $N_\pi = 50$ äquidistante Teilintervalle zerlegt wird.

Für die nachfolgende Analyse der Regularisierungseffekte setzen wir $\gamma_q = 12.5$ und $\gamma_\pi = 0.5$. Abbildung 3.6 zeigt die Wertfunktion V^m für $m = 1, 5, 50$ und die Wertfunktion V des unregularisierten Originalproblems, welche nach der SLM ermittelt wird, in Abhängigkeit von q (links) bzw. s (rechts) für fixierte Werte $t_0 = 0$, $\pi_0 = 0.5$ und $s_0 = 40$ bzw. $q_0 = 125$.

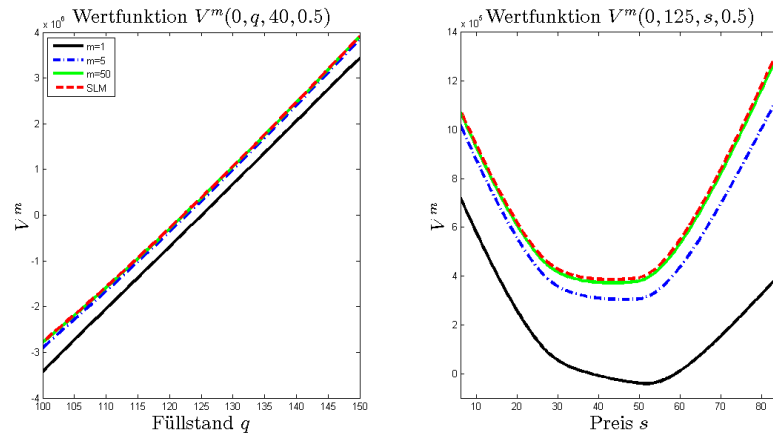


Abbildung 3.6: Wertfunktionen V^m und V in Abhängigkeit von q (links) bzw. s (rechts) für fixierte Werte $t_0 = 0$, $\pi_0 = 0.5$ und $s_0 = 40$ bzw. $q_0 = 125$.

Für kleine m (d.h. starke Störungen durch den Regularisierungsterm $\frac{1}{\sqrt{m}}\gamma d\tilde{B}_t$ in der Zustandsgleichung (1.95)) gibt es sichtbare Unterschiede zwischen den Graphen von V^m . Wie es aus der Konvergenz von V^m gegen V (siehe Folgerung 1.3.14) zu erwarten ist, verschwinden diese Unterschiede für wachsende m . Es fällt auf, dass es bereits für $m = 50$ kaum sichtbare Unterschiede zum Verlauf von V gibt. Die Vermutung, dass V mit der Grenzfunktion der Funktionenfolge V^m übereinstimmt, wird auch auf den in Abbildung 3.7 zu sehenden Verlauf der Fehlernorm von $V^m - V$ gestützt. Hierzu wurde von der in den Gitterpunkten des Berechnungsgebietes $\mathcal{X}^D = [\underline{q}, \bar{q}] \times [\underline{s}, \bar{s}] \times [0, 1]$ zur Zeit $t_0 = 0$ ermittelten Differenz $V^m(t_0, \cdot) - V(t_0, \cdot)$ die diskrete Maximum-Norm $\|V^m(0, \cdot) - V(0, \cdot)\|_\infty$ berechnet und gegen den Regularisierungsparameter m in doppeltlogarithmischer Darstellung aufgetragen. Diese Fehlernorm sinkt mit wachsendem m stark ab. Für den in den Experimenten zu Beginn des Abschnittes verwendeten Wert $m = 10^8$ können die Unterschiede zwischen V^m und V praktisch vernachlässigt werden. Obwohl die Konvergenzaussagen aus Abschnitt 1.3.3 nur für die Wertfunktionen V^m gelten, lässt der Verlauf der Fehlernorm $\|w^m(0, \cdot) - w(0, \cdot)\|_\infty$ auch eine Konvergenz der zugehörigen optimalen Steuerungen vermuten.

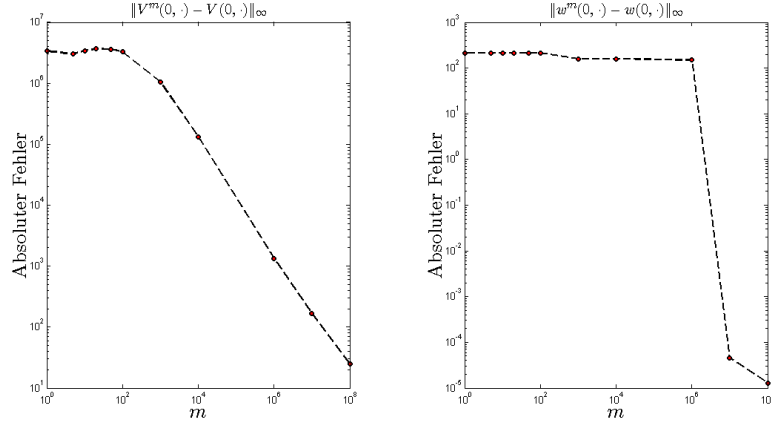


Abbildung 3.7: Diskrete Maximum-Norm der Differenz $V^m(t_0, \cdot) - V(t_0, \cdot)$ der Wertfunktionen (links) und der Differenz $w^m(t_0, \cdot) - w(t_0, \cdot)$ der optimalen Steuerungen (rechts) in Abhängigkeit von m für fixiertes $t_0 = 0$.

Das Lösen der voll-regularisierten HJB-Gleichung mit Hilfe des explizit-impliziten Differenzenschemas für den Parameter $m = 50$ auf einem PC mit CPU Intel Xeon E5-2667V2 und der Taktfrequenz 3.3 GHz benötigt ungefähr 142 Minuten, wobei die Rechenzeit für die unregularisierte HJB-Gleichung, welche mittels des ISLAS gelöst wird, nur 50 Minuten beträgt. Für das semi-regularisierte Problem, bei dem nur die SDE für den Filter regularisiert wird und die Gleichung für den Füllstand unverändert bleibt, vergrößert sich die Rechenzeit auf 110 Minuten.

3.3 Unendlicher Zeithorizont

Analog zum Vorgehen im letzten Abschnitt sollen nun numerische Ergebnisse für das stochastische regularisierte Optimalsteuerungsproblem mit unendlichem Zeithorizont präsentiert werden. Für das in Abschnitt 3.1 vorgestellte Modell werden zunächst die Wertfunktion und die optimale Steuerung für eine sehr schwach gestörte Zustandsgleichung ($m = 10^8$) gezeigt. Anschließend erfolgt die Betrachtung von Regularisierungseffekten für unterschiedliche m und eine Illustration der Konvergenzaussagen für $m \rightarrow \infty$ aus Abschnitt 1.3.3. Schließlich werden die Ergebnisse noch denen für ein stochastisches Optimalsteuerungsproblem mit endlichem Zeithorizont T gegenübergestellt und es wird deren Verhalten für wachsende T untersucht.

Die in (1.123) gegebene HJB-Gleichung für die Wertfunktion $V^m = V^m(x)$ ist eine von der Zeit unabhängige nichtlineare PDE mit den drei Zustandsvariablen q , s und π . Wegen der fehlenden Zeitabhängigkeit kann die für Probleme mit endlichem Zeithorizont einsetzbare und zu sehr effizienten numerischen Schemata führende Semi-Lagrange-Methode, als auch das davor eingesetzte explizit-implizite Differenzenschema nicht verwendet werden. Daher wird hier auf das Policy-Improvement-Verfahren (siehe Abschnitt 2.2.2) zurückgegriffen. Anstelle einer nichtlinearen PDE ist bei diesem Iterationsverfahren eine Folge von linearen PDEs zu lösen. Um den hohen Aufwand an Rechenzeit und Hauptspeicher für ein Differenzenschema für PDEs mit drei Zustandsvariablen zu vermeiden, erfolgt in diesem Abschnitt eine Beschränkung auf ein Preismodell mit konstanten Parametern μ und κ . Damit wird der Energiepreis durch einen Standard-OU-Prozess beschrieben und es entfällt der Filter ${}^m\Pi$ in der Zustandsvariablen mX , welche nun nur noch aus den beiden Komponenten mQ und S besteht.

Für μ und κ werden jeweils die Mittelwerte aus dem Modell mit Markov-modulierten Parametern gewählt, d.h. es wird $\mu = (\mu_1 + \mu_2)/2 = 40$ und $\kappa = (\kappa_1 + \kappa_2)/2 = 15$ gesetzt. Der Wertebereich \mathbb{R} des Preisprozesses wird auf ein abgeschlossenes Intervall $\mathcal{S}^D = [\underline{s}, \bar{s}]$ abgeschnitten. Die Grenzen bestimmen sich durch Anwendung der k - σ -Regel mit $k = 3$ zu

$$[\underline{s}, \bar{s}] = \left[\mu - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa}}, \mu + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa}} \right].$$

Nach Runden ergibt sich $\mathcal{S}^D = [12, 68]$. Dieses Intervall wird wieder mit der Schrittweite $\Delta_s = 0.5$ diskretisiert. Dabei ergeben sich $N_s = 112$ Teilintervalle. Die anderen technisch-physikalischen Parameter des Pumpspeichers, sowie die Regularisierungs- und Diskretisierungsparameter für den Füllstand können den Tabellen 3.2, 3.3 bzw. 3.4 entnommen werden.

Zuerst wird der Fall $m = 10^8$ analysiert. Abbildung 3.8 stellt die Wertfunktion V^m und die optimale Steuerung w^m in Abhängigkeit von q und s für Werte des Füllstandes aus dem „vollständigen“ Gitter $\tilde{Q}^D = [\underline{q} - \varepsilon_1, \bar{q} + \varepsilon_1] = [90, 160]$ (oben), sowie aus dem „abgeschnittenen“ Gitter $Q = [\underline{q}, \bar{q}] = [100, 150]$ (unten) dar. Wegen der Regularisierung und der Konstruktion der Menge U_M der zulässigen Steuerungswerte ist V^m auf den Teilintervallen $q \in [90, 95]$ und $q \in [155, 160]$ für alle $s \in [12, 68]$ gleich Null, was daran liegt, dass die zugehörigen Werte von w^m auf diesen auch gleich Null sind (vgl. mit Abbildung 3.2). Abbildung 3.8 zeigt weiterhin, dass die Wertfunktion V^m stets nichtnegativ ist. Für das betrachtete Steuerungsproblem folgt dies unmittelbar aus der Tatsache, dass für die zulässige Steuerung $u = 0$ (Warten) auch $\tilde{F}(q, s, u) = 0$ gilt und somit für die zugehörige Zielfunktion ebenfalls $J^m(q, s; u) = 0$ folgt. Dies impliziert $V^m(q, s) \geq J^m(q, s; u) = 0$. Diese Nichtnegativitätseigenschaft bleibt auch bei

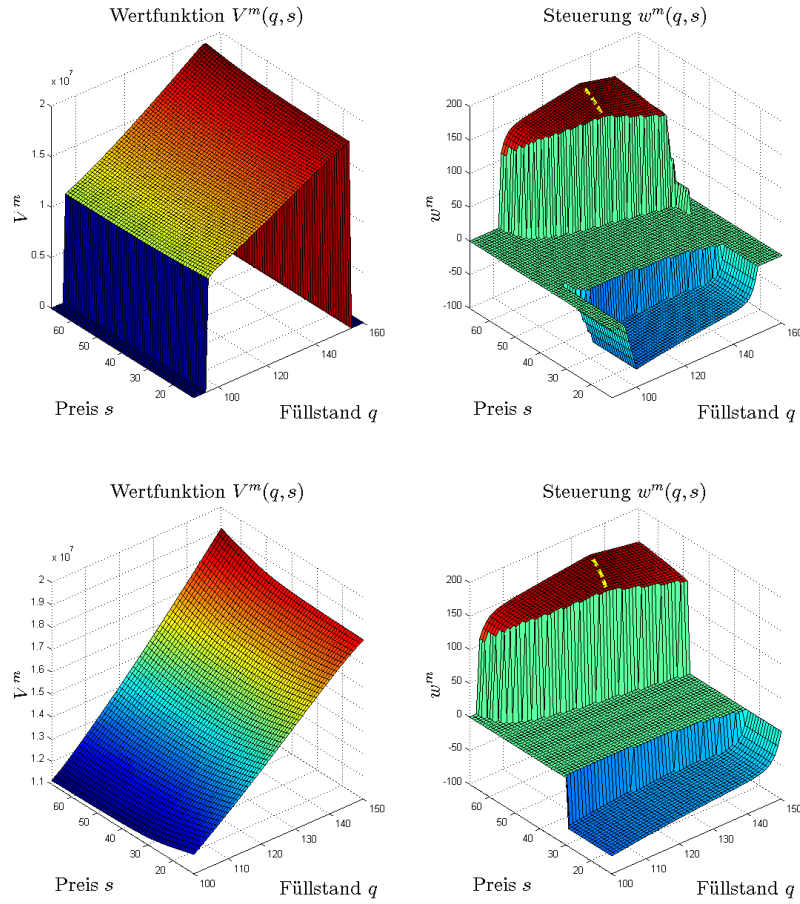


Abbildung 3.8: Wertfunktion und optimale Steuerung in Abhängigkeit vom Füllstand q und Energiepreis s : $q \in \tilde{\mathcal{Q}}^D = [\underline{q} - \varepsilon_1, \bar{q} + \varepsilon_1]$ (oben) und $q \in \mathcal{Q} = [\underline{q}, \bar{q}]$ (unten).

der näherungsweisen Lösung der HJB-Gleichung erhalten, da das verwendete Differenzenschema nichtnegativ und monoton ist.

Für das regularisierte stochastische Optimalsteuerungsproblem ist es interessant zu untersuchen, wie stark das Variieren des Regularisierungsparameters m die Änderung der Wertfunktion und der Steuerung für unendlichen Zeithorizont beeinflusst. Aus diesen Gründen wird das in Abschnitt 2.2.3 auf Basis des Policy-Improvement-Verfahrens aus Abschnitt 2.2.2 entwickelte Differenzenschema zur numerischen Lösung des regularisierten stochastischen Optimalsteuerungsproblems mit unendlichem Zeithorizont für verschiedene Werte von m verwendet mit dem Ziel, die in Abschnitt 1.3.3 für den Fall $T = \infty$ bewiesenen Konvergenzaussagen für $m \rightarrow \infty$ zu veranschaulichen. In diese Analyse wird die numerische Lösung der bezüglich der Variablen q unregularisierten HJB-Gleichung (1.88) einbezogen. Dabei wird die unregularisierte HJB-Gleichung mittels desselben Differenzenschemas gelöst, welches auch zur numerischen Lösung des vollregularisierten Optimalsteuerungsproblems herangezogen wird. Der einzige Unterschied besteht

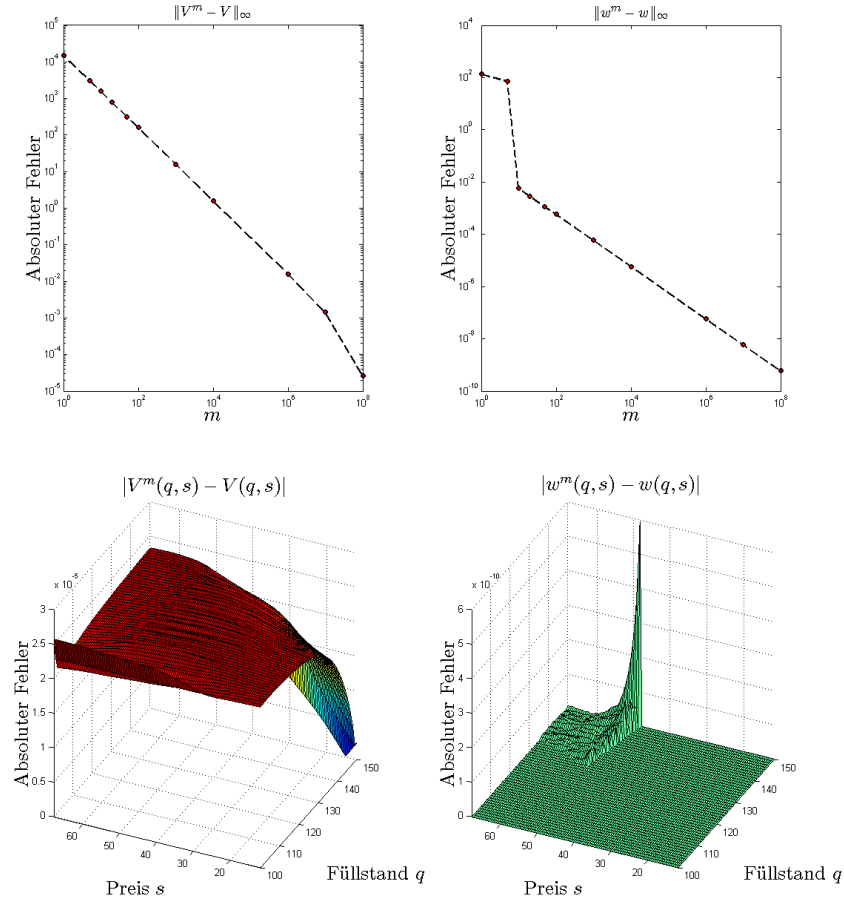


Abbildung 3.9: Diskrete Maximum-Norm der Differenz $V^m - V$ der Wertfunktionen (links) und der Differenz $w^m - w$ der optimalen Steuerungen (rechts) in Abhängigkeit von m (oben); Absoluter Fehler $|V^m - V|$ der Wertfunktionen (links) und $|w^m - w|$ der optimalen Steuerungen (rechts) in Abhängigkeit von q und s für $m = 10^8$ (unten).

darin, dass die HJB-Gleichung bezüglich des Füllstandes unregularisiert bleibt, sodass das Berechnungsgebiet für q das abgeschlossene Intervall $\mathcal{Q} = [q, \bar{q}]$ ist. Dabei ist das zugehörige numerische Differenzschema wegen der verwendeten Approximation des degenerierten Differenzialoperators in der HJB-Gleichung und des von Null verschiedenen Diskontierungsfaktors ρ wieder stabil, konsistent und monoton, hat aber lediglich lineare Approximationsordnung bezüglich der Variablen q . Für eine detaillierte Analyse und Auswertung der in den einzelnen Iterationsschritten des Policy-Improvement-Verfahrens erhaltenen Ergebnisse sei auf Abschnitt 3.5 verwiesen.

Das Variieren des Regularisierungsparameters m ermöglicht, den maximalen absoluten Fehler sowohl für die Wertfunktion V^m als auch für die optimale Steuerung w^m im Vergleich zur Lösung des unregularisierten Problems in der diskreten Maximum-Norm $\|V^m - V\|_\infty$ bzw.

$\|w^m - w\|_\infty$ auf dem Gitter $\mathcal{X}^D = \mathcal{Q} \times \mathcal{S}^D = [\underline{q}, \bar{q}] \times [\underline{s}, \bar{s}]$ zu berechnen.

Der obere Teil der Abbildung 3.9 zeigt diese Fehlernormen in Abhängigkeit von m in doppeltlogarithmischer Darstellung, woraus folgt, dass die diskrete Maximum-Norm von $V^m - V$ mit wachsendem Regularisierungsparameter m sinkt. Das erhaltene Resultat bestätigt die in Abschnitt 1.3.3 bewiesene Konvergenzaussage (siehe Folgerung 1.3.17) für die Wertfunktion V^m . Außerdem ist die optimale Steuerung w^m für größere m nahezu identisch zu der optimalen Steuerung w des unregulierten Problems.

Somit weisen die Ergebnisse für die Wertfunktion und die optimale Steuerung gegenüber denen für das mit $m = 10^8$ regulierte Problem keine sichtbaren Unterschiede auf. Dies indiziert der untere Teil der Abbildung 3.9, welche die absoluten Fehler $|V^m - V|$ und $|w^m - w|$ als Funktionen von (q, s) zeigt. Die Ergebnisse zeigen, dass der absolute Fehler für ein hinreichend großes m sowohl für die Wertfunktion als auch für die optimale Strategie vernachlässigbar klein ist.

Zuletzt wird untersucht, für welche Wahl des Zeithorizontes T das Modell des Pumpspeichers ohne partielle Information und mit dem endlichen Zeithorizont¹ näherungsweise mit dem Modell mit unendlichem Zeithorizont übereinstimmt. Für diese Experimente wird als Endbedingung die Funktion Φ für den Fall der Pumpspeicherauflösung (siehe Abbildung 3.1) herangezogen und die Diskontierungsrate ρ wird gleich 0.2 gesetzt. Dabei wird das Optimalsteuerungsproblem mit dem unendlichen Zeithorizont numerisch ohne Regularisierung gelöst.

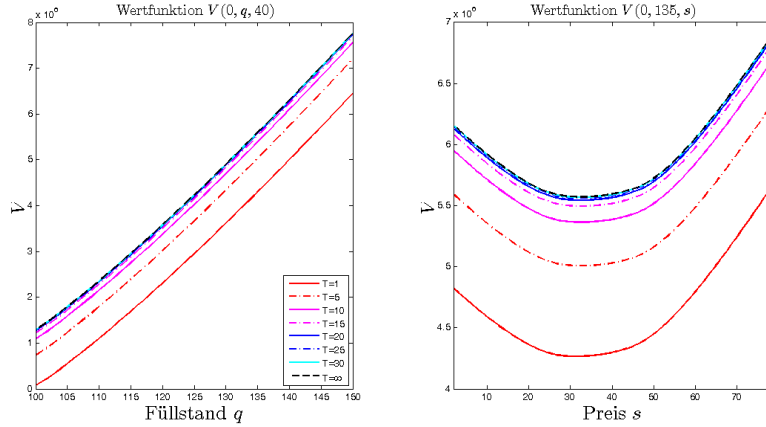


Abbildung 3.10: Wertfunktion für $t_0 = 0$ und verschiedene Werte von T : $s_0 = 40$ (links) bzw. $q_0 = 135$ (rechts) ist fixiert.

Abbildung 3.10 zeigt, dass die Wertfunktion mit der Zeit T wächst. Das ist jedoch nicht erstaunlich, da bei einem längeren Zeithorizont der Manager die Möglichkeit hat, den ökonomischen

¹Dieses stochastische Optimalsteuerungsproblem mit voller Information und endlichem Zeithorizont wird numerisch mittels des in Abschnitt 2.1.3 entwickelten Semi-Lagrange-Approximationsschemas gelöst. Hierfür bleibt die zu diesem Problem assoziierte HJB-Gleichung unreguliert bezüglich der Variablen q . Für weitere Details über Anwendung dieses Differenzenschemas siehe Abschnitt 3.4.2, in welchem es auf das stochastische Optimalsteuerungsproblem ohne partielle Information angewendet wird.

mischen Wert des Speichers zu vergrößern. Außerdem ist zu erkennen, dass sich bei einem hinreichend großen T (≥ 25 Jahre) die für das Modell mit endlichem und unendlichem Zeithorizont erhaltenen Wertfunktionen nur noch sehr wenig voneinander unterscheiden. Somit kann man annehmen, dass man bei dem in Tabelle 3.2 gegebenen Datensatz das Modell mit $T \geq 25$ in guter Näherung als Modell mit unendlichem Zeithorizont verwenden kann. Diese Annahme bestätigt Abbildung 3.11 für die optimale Steuerung, die mit der Vergrößerung von T stationär wird, d.h. einen konstanten Verlauf innerhalb des durch die Lösung des stationären Problems erzeugten Preiskorridors [27, 48] nachweist. Dabei sei bemerkt, dass bei $q_0 = 135$ die kritischen Preise, welche die Bereiche „Kaufen“ und „Warten“, sowie „Warten“ und „Verkaufen“ voneinander trennen, im Modell mit unendlichem Zeithorizont gleich $s_0 = 27$ und $s_0 = 48$ sind. Somit nähert sich die optimale Steuerung bei der Vergrößerung des Zeithorizontes T der stationären Steuerung für $T = \infty$ an.

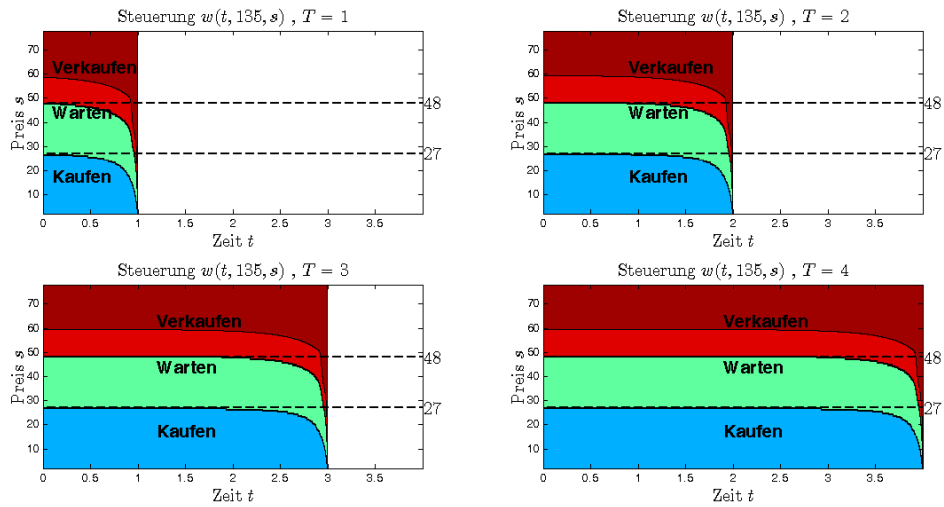


Abbildung 3.11: Optimale Steuerung für $q_0 = 135$ und verschiedene Werte von T .

3.4 Parametersensitivität

In diesem Abschnitt soll mit Hilfe von numerischen Experimenten die Sensitivität der Wertfunktion und der optimalen Steuerung bezüglich der im Steuerungsproblem enthaltenen Parameter untersucht werden. Dabei wird wieder das Problem mit endlichem Zeithorizont betrachtet. Zunächst wird die Abhängigkeit der Resultate von der Markov-Modulation der Driftparameter des Energiepreismodells betrachtet. Hierfür wird jeweils nur einer der beiden Parameter μ und κ Markov-moduliert und der andere konstant gehalten. Außerdem werden die Intensitäten der Markov-Kette variiert. Anschließend wird die Sensitivität bezüglich der Parameter μ , κ und σ des Preismodells, der durch die konstante Querschnittsfläche A_S des oberen Speicherbeckens beschriebenen Kapazität des Speichers und schließlich die Sensitivität bezüglich der durch die

Endbedingung gegebenen Bewertung des Speichers zur Zeit T untersucht. Dazu wird jeweils ein Modell ohne Markov-Modulation der Driftparameter μ und κ betrachtet. In allen Studien dieses Abschnittes wird die SDE für den Füllstand Q ohne Regularisierung betrachtet. Dies erlaubt für die numerische Lösung den Einsatz des in Abschnitt 2.1.3 entwickelten Semi-Lagrange-Approximationsschemas, welches sich durch eine einfachere Implementation und kürzere Rechenzeiten auszeichnet. Dieses Vorgehen ist gerechtfertigt, da die in den Abschnitten 3.2 und 3.3 mit diesem Schema erhaltenen Ergebnisse keine nennenswerten Unterschiede zu denen für das mit großem Parameter m regularisierte Steuerungsproblem aufweisen.

3.4.1 Sensitivität bezüglich der Markov-Modulation

Im Unterschied zu dem in Abschnitt 3.2 betrachteten Modell soll nun nur einer der beiden Driftparameter μ und κ des Energiepreismodells von der Markov-Kette Y abhängen, während der andere konstant ist. In einem ersten Experiment wird die Steifigkeit κ als Konstante und gleich dem Mittelwert der in Abschnitt 3.2 verwendeten Werte κ_1 und κ_2 gesetzt, d.h. $\kappa = (\kappa_1 + \kappa_2)/2 = 15$. Alle anderen Modellparameter werden beibehalten und wie in den Tabellen 3.1 und 3.2 gesetzt. Die erhaltenen Ergebnisse für die Wertfunktion und optimale Steuerung unterscheiden sich nur geringfügig von denen in Abschnitt 3.2 (siehe die Abbildungen 3.2, 3.4 und 3.5) und werden daher nicht präsentiert.

Sichtbare Änderungen zeigen dagegen die nachfolgenden Ergebnisse für das zweite Experiment, bei dem das Gleichgewichtsniveau μ konstant und nur die Steifigkeit κ Markov-moduliert ist. Die Konstante μ wird gleich dem Mittelwert $\mu = (\mu_1 + \mu_2)/2 = 40$ gesetzt. Alle anderen

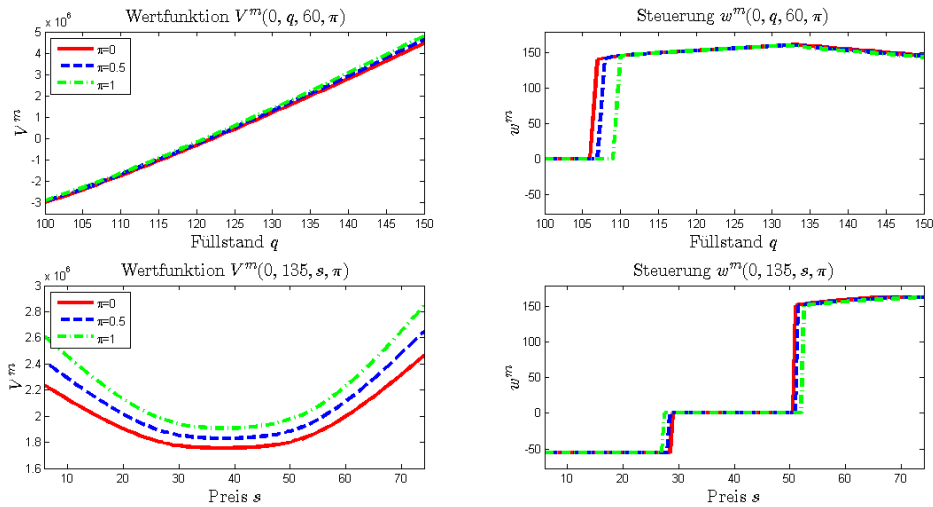


Abbildung 3.12: Wertfunktion und optimale Steuerung in Abhängigkeit vom Füllstand q (oben) und vom Energiepreis s (unten) für unterschiedliche $\pi \in \{0, 0.5, 1\}$ und fixierte $t_0 = 0$, $q_0 = 135$ und $s_0 = 60$ (Modell mit Markov-modulierter Steifigkeit $\kappa(Y)$ und konstantem μ).

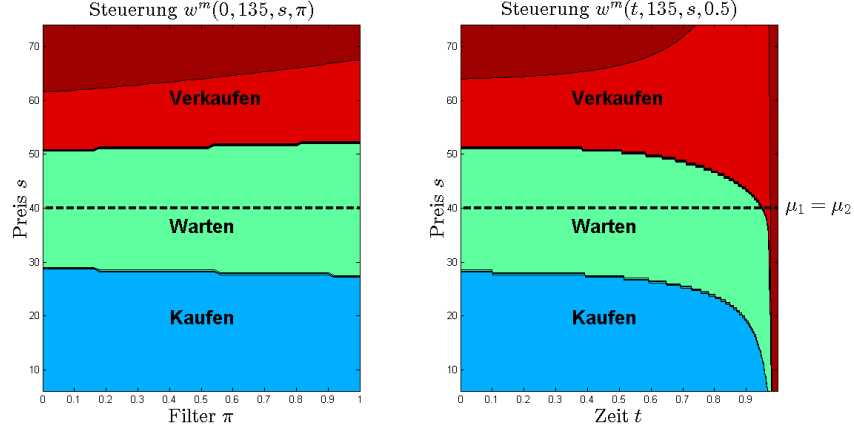


Abbildung 3.13: Optimale Steuerung in Abhängigkeit vom Energiepreis s und vom Filter π für fixiertes $q_0 = 135$: $t_0 = 0$ (links) bzw. $\pi_0 = 0.5$ (rechts) (Modell mit Markov-modulierter Steifigkeit $\kappa(Y)$ und konstantem μ).

Modellparameter sind wie in den Tabellen 3.1 und 3.2. Das Berechnungsgebiet $\tilde{\mathcal{X}}^D = \mathcal{Q} \times \mathcal{S}^D \times \tilde{\mathcal{P}}^D = [100, 150] \times [\underline{s}, \bar{s}] \times [-0.2, 1.2]$ wird mit den in den Tabellen 3.3 und 3.4 gegebenen Parametern diskretisiert. Die Grenzen des Gebietes $\mathcal{S}^D = [\underline{s}, \bar{s}]$ für den Energiepreis werden nach der k - σ -Regel mit $k = 3$ als

$$[\underline{s}, \bar{s}] = \left[\mu - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa_1}}, \mu + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa_1}} \right]$$

berechnet. Nach dem Runden ergibt sich das abgeschlossene Intervall $\mathcal{S}^D = [6, 74]$, welches mit der Schrittweite $\Delta_s = 0.5$ in $N_s = 136$ Teilintervalle eingeteilt wird.

Die in den Abbildungen 3.12 und 3.13 gezeigten Verläufe der Wertfunktion und der optimalen Steuerung zeigen im Vergleich zum Modell, bei dem zusätzlich noch das Gleichgewichtsniveau μ Markov-moduliert ist, eine deutlich geringere Abhängigkeit vom Filter π . Diese (wenn auch schwachen) Abhängigkeiten erklären sich aus der Tatsache, dass mit den gewählten Steifigkeiten $\kappa_1 = 10$ und $\kappa_2 = 20$ die von $\sigma^2/2\kappa(Y_t)$ abhängige Varianz des Energiepreises im ersten Zustand größer als im zweiten ist. Wegen der relativ kleinen Intensitäten der Markov-Kette ($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$) kann der Speichermanager für π nahe 1 davon ausgehen, dass der Energiepreis weiterhin sehr volatil bleiben wird. Durch aktives Speichermanagement kann er daraus größere Gewinne erzielen als bei einem weniger volatilen Energiepreis ($\pi \approx 0$). Dies erklärt die größeren Werte der Wertfunktion für große π .

Die Darstellungen der optimalen Steuerung in Abbildung 3.12 rechts und in Abbildung 3.13 links zeigen, dass der Preisbereich $[S_P, S_A]$, in dem der Speichermanager wartet, mit wachsendem π breiter wird. Auch dieser Effekt erklärt sich mit den für größere π zu erwartenden höheren Preisfluktuationen. Damit wird der Kauf bzw. Verkauf erst bei entsprechend größeren Abweichungen des Energiepreises vom Gleichgewichtsniveau $\mu = 40$ lohnend.

In einem dritten Experiment zur Markov-Modulation soll die Sensitivität bezüglich der

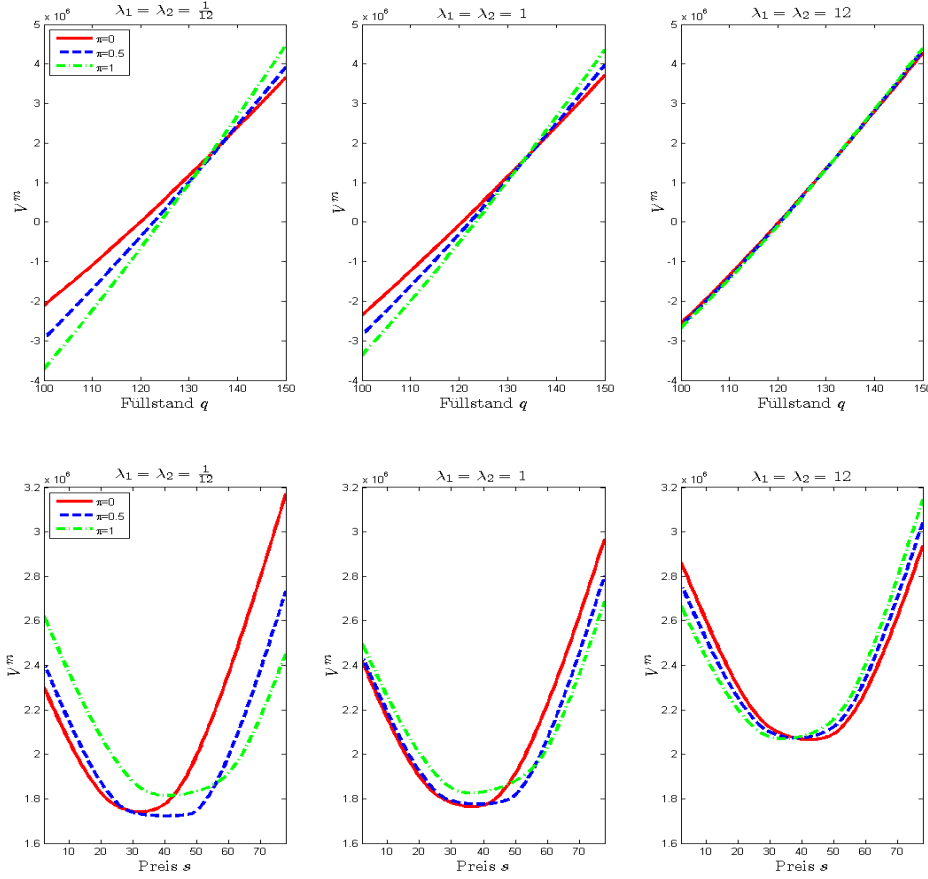


Abbildung 3.14: Wertfunktion in Abhängigkeit vom Füllstand q (oben) und vom Energiepreis s (unten) für unterschiedliche $\lambda \in \{1/12, 1, 12\}$ und $\pi \in \{0, 0.5, 1\}$ und fixierte $t_0 = 0$, $s_0 = 40$ und $q_0 = 135$.

Intensitäten der Markov-Kette studiert werden. Hierfür wird wieder das Modell mit Markov-moduliertem Gleichgewichtsniveau und konstanter Steifigkeit $\kappa = 15$ aus dem ersten Experiment betrachtet, da hierfür stärkere Abhängigkeiten vom Filter beobachtet wurden. Die Grenzen des Berechnungsgebietes $\mathcal{S}^D = [\underline{s}, \bar{s}]$ für den Energiepreis $^m S$ werden wieder mit der 3- σ -Regel bestimmt und als

$$[\underline{s}, \bar{s}] = \left[\mu_2 - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa}}, \mu_1 + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{2\kappa}} \right]$$

gewählt. Nach Runden ergab sich das abgeschlossene Intervall $\mathcal{S}^D = [2, 78]$, welches wieder mit der Schrittweite $\Delta_s = 0.5$ diskretisiert wird und eine Zerlegung von \mathcal{S}^D mit $N_s = 152$ Teilintervallen liefert. Zuerst wird das Modell mit gleichen Intensitäten $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ mit $\lambda = 1/12, 1$ und 12 betrachtet, d.h. die Markov-Kette Y wechselt im Mittel ein Mal in 12 Jahren, ein Mal im Jahr bzw. ein Mal im Monat ihren Zustand.

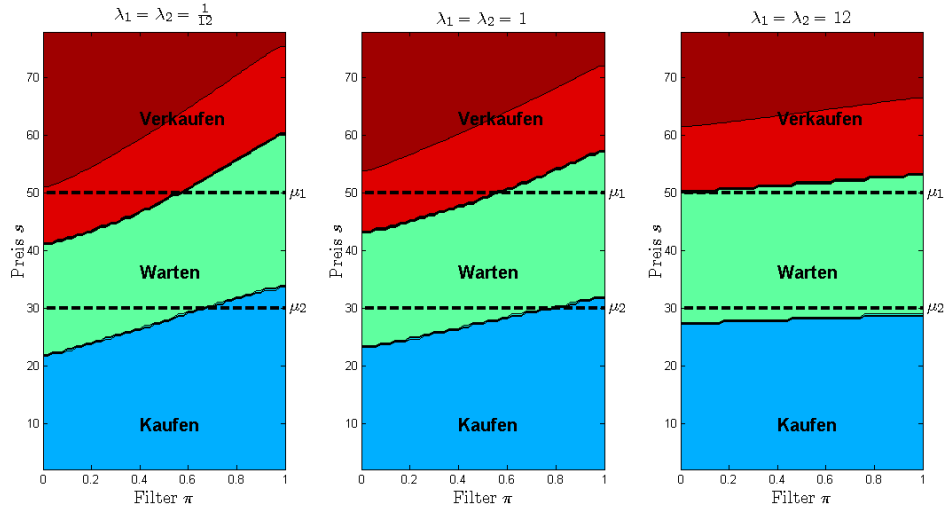


Abbildung 3.15: Optimale Steuerung in Abhängigkeit vom Energiepreis s und vom Filter π für unterschiedliche $\lambda \in \{1/12, 1, 12\}$ und fixierte $t_0 = 0$ und $q_0 = 135$.

Die Abbildungen 3.14 und 3.15 zeigen, dass die Wertfunktion und die optimale Steuerung für wachsendes λ immer weniger vom Filter π abhängen. Da die Markov-Kette mit wachsender Intensität immer häufiger springt, gelingt es dem Speichermanager einerseits immer weniger, den momentanen Zustand verlässlich zu schätzen. Andererseits kann aus der Kenntnis des momentanen Zustandes kaum Gewinn gezogen werden, da sich dieser bereits nach kurzer Zeit wieder ändern wird.

In einem vierten Experiment werden verschiedene Intensitäten λ_1 und λ_2 gewählt:

$$A : (\lambda_1, \lambda_2) = (12, 1/12) ,$$

$$B : (\lambda_1, \lambda_2) = (1/12, 12) .$$

Im Fall A verweilt Y im Mittel nur einen Monat im ersten Zustand mit dem höheren Gleichgewichtsniveau $\mu_1 = 50$, während Zustand zwei mit $\mu_2 = 30$, d.h. mit kleineren Energiepreisen, im Mittel 12 Jahre aktiv bleibt. Im Fall B ist dagegen der erste Zustand mit den im Mittel höheren Energiepreisen die meiste Zeit aktiv. Abbildung 3.16 für die optimale Steuerung zeigt deutlich die Verschiebung der Bereiche „Kaufen“, „Warten“ und „Verkaufen“ in Richtung höherer Preise im Fall B . Dies erklärt sich durch das höhere Preisniveau, welches die meiste Zeit aktiv ist. Insbesondere kann der Bereich „Warten“ sehr gut als eine Umgebung desjenigen Gleichgewichtsniveaus μ_1, μ_2 beschrieben werden, welches im Mittel die längere Zeit aktiv ist.

3.4.2 Sensitivität bezüglich des Gleichgewichtsniveaus

In diesem und den nachfolgenden Abschnitten zur Sensitivitätsanalyse wird das Preismodell (1.14) ohne Markov-Modulation der Driftparameter des OU-Prozesses betrachtet. Um alle Stu-

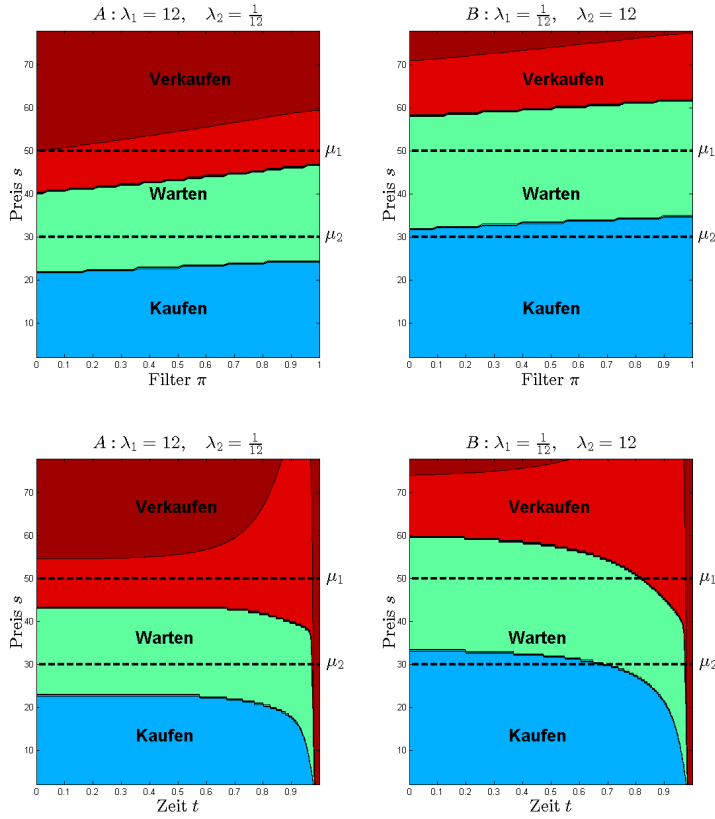


Abbildung 3.16: Oben: Optimale Steuerung in Abhängigkeit vom Filter π und vom Preis s für $A : \lambda_1 = 12, \lambda_2 = 1/12$ (links) und $B : \lambda_1 = 1/12, \lambda_2 = 12$ (rechts) für fixierte $t_0 = 0$ und $q_0 = 135$.

Unten: Optimale Steuerung in Abhängigkeit von der Zeit t und vom Preis s für $A : \lambda_1 = 12, \lambda_2 = 1/12$ (links) und $B : \lambda_1 = 1/12, \lambda_2 = 12$ (rechts) für fixierte $q_0 = 135$ und $\pi_0 = 0.5$.

dien mit dem gleichen diskretisierten Berechnungsgebiet durchführen zu können, wird das Gebiet für den Energiepreis $S^D = [2, 78]$ gesetzt und mit einer Schrittweite $\Delta_s = 0.5$ in $N_s = 152$ Teilintervalle zerlegt. Außerdem wird mit einer Zeitschrittweite $\Delta_\tau = 1/(3 \cdot 365) = 8$ Stunden, d.h. mit $N_\tau = 1095$ gearbeitet.

Zur Untersuchung der Sensitivität bezüglich des Gleichgewichtsniveaus μ werden die Wertfunktion und die optimale Steuerung für die Werte $\mu = 30, 40, 50$ berechnet und verglichen. Die im oberen Teil der Abbildung 3.17 gezeigten optimalen Steuerungen weisen darauf hin, dass sich mit der Erhöhung des Gleichgewichtsniveaus wie zu erwarten auch die kritischen Preise S_P und S_A^a und damit die Bereiche für „Kaufen“, „Warten“ und „Verkaufen“ in Richtung höherer Preise verschieben. Abgesehen von dieser Verschiebung zeigen sich nur geringe weitere qualitative Unterschiede in den Steuerungen. Der untere Teil der Abbildung 3.17 zeigt die Wertfunktion zur Zeit $t = 0$ in Abhängigkeit vom Füllstand für $s_0 = 40$ (links) und vom Preis für $q_0 = 135$ (rechts). Für kleine Füllstände sinkt die Wertfunktion mit wachsendem Gleichgewichtsniveau.

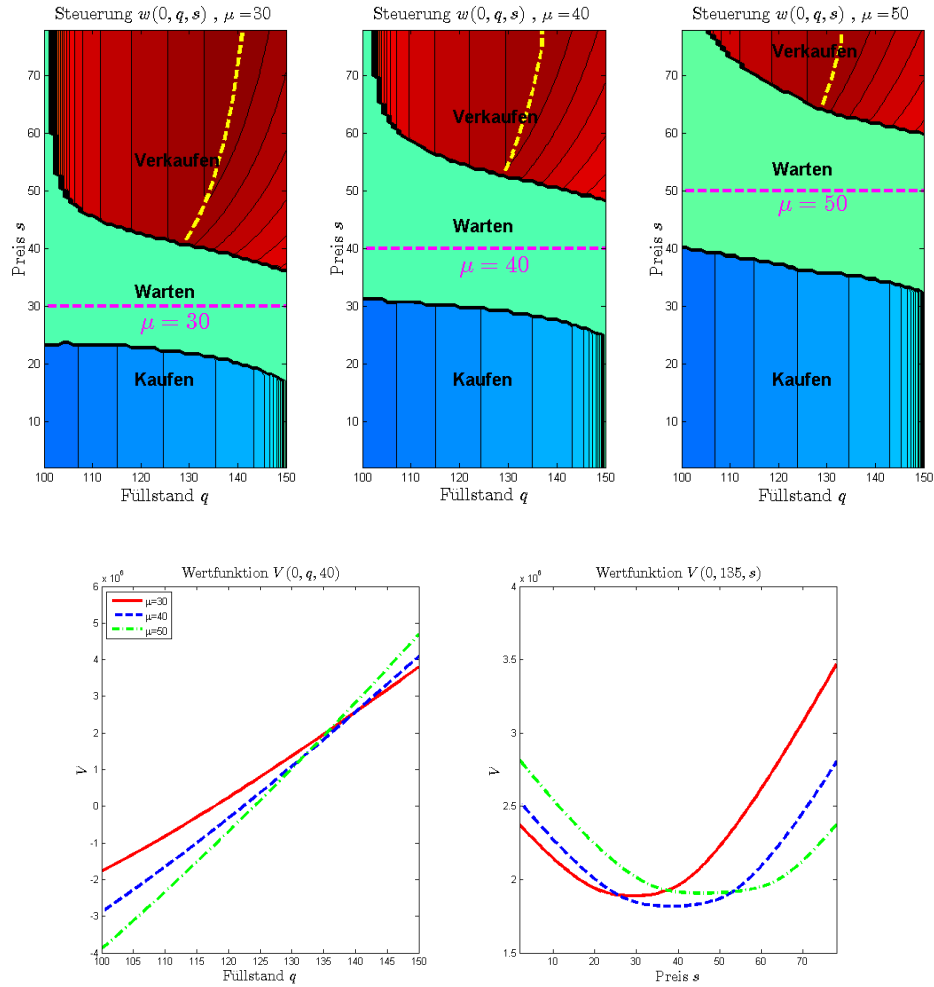


Abbildung 3.17: Optimale Steuerung in Abhängigkeit vom Füllstand q und vom Energiepreis s (oben) und Wertfunktion als Funktion des Füllstandes q für $s_0 = 40$ (links unten) und des Energiepreises s für $q_0 = 135$ (rechts unten) für fixiertes $t_0 = 0$ und unterschiedliche $\mu \in \{30, 40, 50\}$.

Dies ist eine Folge der zur Zeit $T = 1$ fälligen Strafzahlung im Falle von Füllständen $q_0 < q_P = 125$. Die Kosten für das Anheben des Füllstandes auf das Niveau q_P wachsen mit μ und senken entsprechend den Wert des Speichers. Ist der Speicher dagegen gut gefüllt, so zeigt sich ein umgekehrtes Verhalten. Nun kann von den für größeres μ zu erwartenden höheren Preisen profitiert werden, indem der das Niveau q_P übersteigende (und zur Zeit T wertlos verfallende) Speichereinhalt verkauft wird. Die Darstellung der Wertfunktion in Abbildung 3.17 unten rechts zeigt ein uneinheitliches Monotonieverhalten der Wertfunktion V sowohl bezüglich des Energiepreises als auch des Gleichgewichtsniveaus μ .

So ist V für Preise deutlich kleiner als μ monoton fallend in s und wachsend bezüglich μ ,

für Preise deutlich größer als μ dagegen ist V monoton wachsend in s und fallend bezüglich μ . Für Preise in der Umgebung von μ ändert sich V nur wenig. Dieses Verhalten erklärt sich aus der Mean-Reversion-Eigenschaft des Energiepreisprozesses. Ist der gegenwärtige Energiepreis deutlich kleiner als μ , so wird er in Zukunft tendenziell wieder in Richtung μ steigen. In dieser Situation ist es optimal, Energie zu den momentan günstigen Preisen zu kaufen und zu speichern. Trotz der hierfür anfallenden Kosten kann durch die Erlöse aus dem Verkauf nach dem Steigen der Preise ein Gewinn erwirtschaftet werden. Dieser Effekt verstärkt sich, je kleiner der Preis s zu gegebenem μ bzw. je größer μ zu fixiertem s ist und führt zu dem beobachteten Monotonieverhalten. Ist der gegenwärtige Energiepreis dagegen deutlich größer als μ , so kann der Speichermanager von tendenziell in Richtung μ fallenden Preisen ausgehen. Dies ermöglicht wiederum Gewinne durch das Entladen und den Verkauf von Energie und den nach dem Fallen der Preise durchgeführten Rückkauf der Energie. Diese Gewinne fallen umso höher aus, je größer die Differenz $s - \mu$ ist.

3.4.3 Sensitivität bezüglich der Steifigkeit

Die Steifigkeit κ steuert die Geschwindigkeit, mit der die Energiepreise zum Gleichgewichtsniveau μ zurückgetrieben werden. Außerdem bestimmt κ zusammen mit der Volatilität σ die Varianz der stationären Verteilung des OU-Prozesses S , welche gleich $\sigma^2/2\kappa$ ist. Für wachsendes κ wird die stationäre Verteilung in kürzerer Zeit erreicht und $\sigma^2/2\kappa$ wird kleiner.

Für die Sensitivitätsanalyse bezüglich κ werden die Wertfunktion und die optimale Steuerung für $\kappa = 10, 100, 200$ berechnet und verglichen (siehe Abbildung 3.18). Mit $\mu = 40$ und $\sigma = 50$ ist die stationäre Verteilung eine Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/2\kappa)$ mit der Standardabweichung $\sigma/\sqrt{2\kappa} = 11.2, 3.5, 2.5$. Für $\kappa = 200$ ist der 2-sigma-Bereich der stationären Verteilung das Intervall $(35, 45)$. Für Anfangswerte S_0 außerhalb dieses Bereiches wird der Preis S_t in kurzer Zeit in Richtung dieses Intervalls zurückgetrieben.

Für die optimale Steuerung zum Zeitpunkt $t = 0$ (siehe Abbildung 3.18 oben rechts) impliziert die zum Zeitpunkt $T = 1$ fällige Strafzahlung, dass es für $q_0 < q_P = 125$ und Preise $s_0 < 35$ optimal ist, Energie zu kaufen und den Speicher zu laden, um die Mindestreserve q_P zu sichern. Damit kann von den nur noch kurze Zeit währenden geringen Energiepreisen profitiert werden. Ist zur Zeit $t = 0$ der Speicher dagegen bereits über die Mindestreserve q_P gefüllt, so lohnt sich ein weiteres Befüllen erst bei deutlich kleineren Preisen ($s_0 < 25$). Dagegen sollte bei Preisen $s_0 > 45$ die nur kurze Phase hoher Preise genutzt werden, um den über q_P hinausgehenden Speicherinhalt zu verkaufen. Die oben beschriebenen Effekte erklären auch die für $\kappa = 100$ und 200 sichtbaren sprunghaften Änderungen der kritischen Preise S_P und S_A^a an der Stelle $q_0 = q_P = 125$. Die in Abbildung 3.18 unten dargestellten Verläufe der Wertfunktion in Abhängigkeit von q bzw. s zeigen neben dem bereits zuvor festgestellten Monotonieverhalten, dass kleinere κ und damit volatilere Energiepreise zu einem höheren Wert des Speichers führen.

3.4.4 Sensitivität bezüglich der Volatilität

Die Volatilität σ beeinflusst zusammen mit der Steifigkeit κ über das Verhältnis $\sigma^2/2\kappa$ die Varianz des Preisprozesses S . Diese sinkt mit fallendem σ und für $\sigma \rightarrow 0$ entartet S zu einer deterministischen Funktion

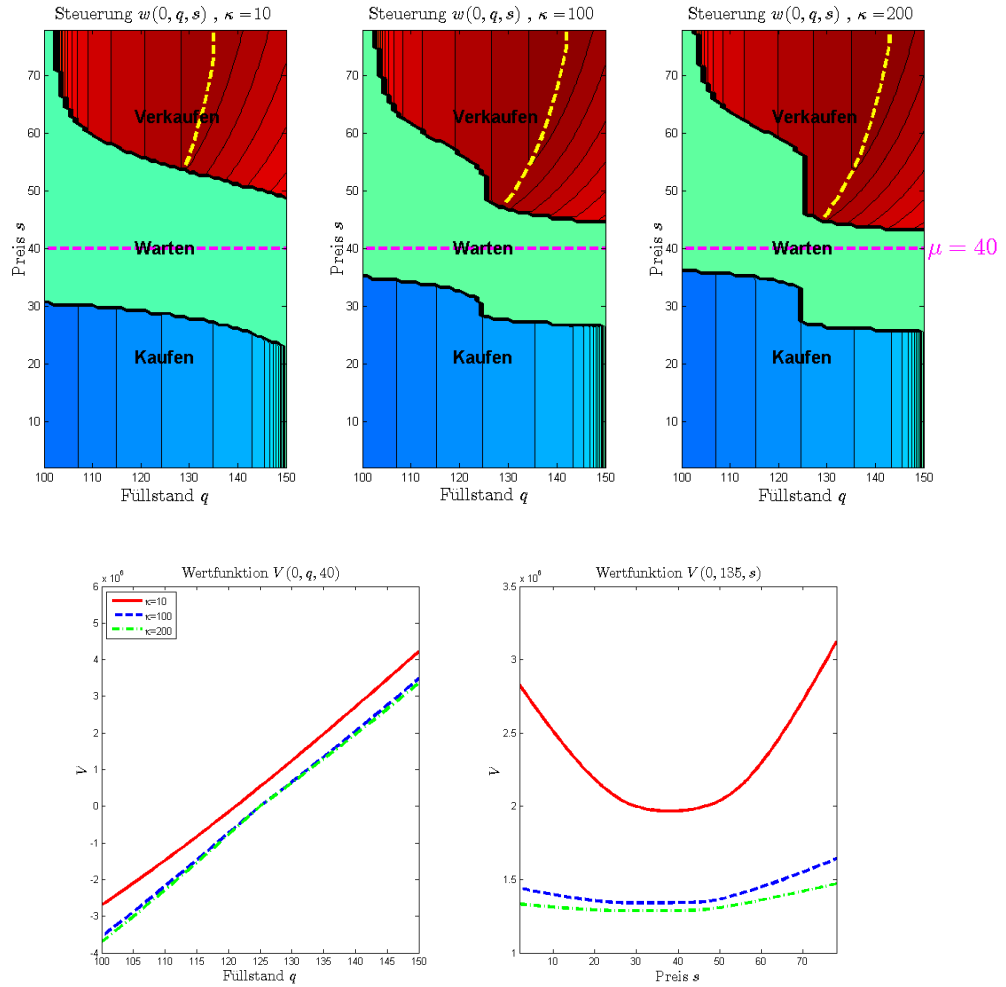


Abbildung 3.18: Optimale Steuerung in Abhängigkeit vom Füllstand q und vom Energiepreis s (oben) und Wertfunktion als Funktion des Füllstandes q für $s_0 = 40$ (links unten) und des Energiepreises s für $q_0 = 135$ (rechts unten) für fixiertes $t_0 = 0$ und unterschiedliche $\kappa \in \{10, 100, 200\}$.

$$S_t = \mu + e^{-\kappa t}(S_0 - \mu),$$

welche exponentiell schnell gegen das Gleichgewichtsniveau μ strebt. Für hinreichend kleine σ kann der Speichermanager daher verlässliche Prognosen für die zukünftigen Energiepreise ableiten. Für $S_0 > \mu$ kann er mit fallenden Preisen, die über μ bleiben, und für $S_0 < \mu$ mit steigenden Preisen kleiner als μ rechnen.

In dieser Studie werden die Wertfunktion und die optimale Steuerung für die Parameterwerte $\sigma = 10, 30, 60$ berechnet und verglichen. Die in Abbildung 3.19 oben gezeigten optimalen

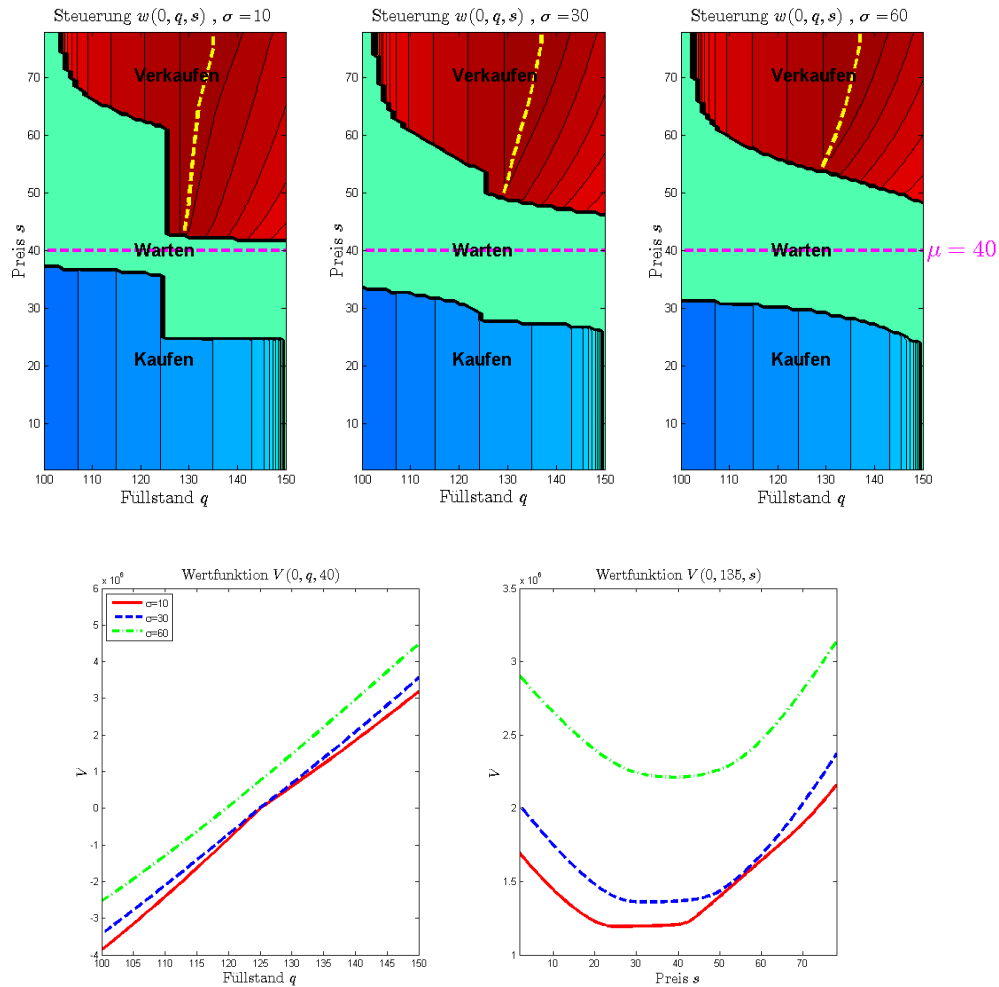


Abbildung 3.19: Optimale Steuerung in Abhängigkeit vom Füllstand q und vom Energiepreis s (oben) und Wertfunktion als Funktion des Füllstandes q für $s_0 = 40$ (links unten) und des Energiepreises s für $q_0 = 135$ (rechts unten) für fixiertes $t_0 = 0$ und unterschiedliche $\sigma \in \{10, 30, 60\}$.

Steuerungen ähneln jenen in Abbildung 3.18, welche für variierendes κ (und konstantes σ) erhalten wurden. So werden kleine Varianzen von S sowohl durch große κ als auch durch kleine σ erreicht und die in Abschnitt 3.4.3 gegebenen Interpretationen der Ergebnisse gelten hier sinngemäß.

3.4.5 Sensitivität bezüglich der Speicherkapazität

Für die Untersuchung der Sensitivität bezüglich der Speicherkapazität werden die Wertfunktion und die optimale Steuerung für verschiedene Werte der Querschnittsfläche A_S bestimmt und ver-

glichen. Mit der Variation dieses Parameters ändern sich die Zeiten, welche für das vollständige Befüllen und Entleeren des Speichers bzw. das Auffüllen und Entleeren des Speichers bis zum Niveau der Mindestreserve q_P erforderlich sind (siehe Tabelle 3.5). Diese Zeiten zusammen mit dem gewählten Zeithorizont $T = 1$ Jahr und der zur Zeit T fälligen Strafzahlung determinieren die qualitativen Eigenschaften der Wertfunktion und optimalen Steuerung.

Tabelle 3.5: Zeiten zum Befüllen und Entleeren des Speichers in Tagen.

A_S	Befüllen		Entleeren			
	$\underline{q} \nearrow \bar{q}$	$\underline{q} \nearrow q_P$	$\bar{q} \searrow \underline{q}$	$q_0 \searrow \underline{q}$	$\bar{q} \searrow q_P$	$q_0 \searrow q_P$
	vollständig	bis Mindestreserve	vollständig	bis Mindestreserve	bis Mindestreserve	bis Mindestreserve
$1 \cdot 10^7$	98	44	37	27	18	7
$5 \cdot 10^7$	488 $\approx 1\frac{1}{3}$ Jahre	221 $\approx \frac{2}{3}$ Jahr	187 $\approx \frac{1}{2}$ Jahr	135 $\approx \frac{1}{3}$ Jahr	89	37
$10 \cdot 10^7$	977 $\approx 2\frac{2}{3}$ Jahre	441 $\approx 1\frac{1}{4}$ Jahre	374 ≈ 1 Jahr	270 $\approx \frac{3}{4}$ Jahr	178 $\approx \frac{1}{2}$ Jahr	73

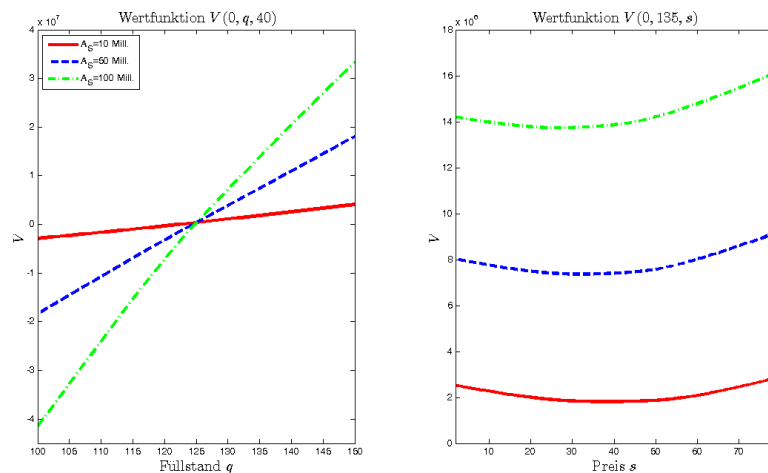


Abbildung 3.20: Wertfunktion als Funktion des Füllstandes q (links) und des Energiepreises s (rechts) für unterschiedliche $A_S \in \{1 \cdot 10^7, 5 \cdot 10^7, 10 \cdot 10^7\}$ und fixierte $t_0 = 0$, $s_0 = 40$ bzw. $q_0 = 135$.

Die Abbildung 3.20 zeigt Verläufe der Wertfunktion in Abhängigkeit vom Füllstand q (links) bzw. vom Energiepreis s (rechts) zum Anfangszeitpunkt $t_0 = 0$ für drei verschiedene Werte der Speicherkapazität $A_S = 1 \cdot 10^7$, $5 \cdot 10^7$ und $10 \cdot 10^7$. Der linke Teil zieht die Wertfunktion als Funktion des Füllstandes und das bereits bekannte (wachsende) Monotonieverhalten bezüglich

q . Es fällt auf, dass für $q < q_P$, d.h. für Anfangsfüllstände unter der Mindestreserve $q_P = 125$, der Wert des Speichers mit wachsender Kapazität A_S fällt. Dies erklärt sich aus Kosten, die beim Anheben des Füllstandes auf das Niveau q_P anfallen und den Wert des Speichers mindern. Diese Kosten wachsen proportional zur Kapazität A_S . Ist der Speicher dagegen zu Beginn bereits über das kritische Niveau q_P befüllt, so wächst sein Wert mit der Kapazität. Dieses Verhalten ist ebenfalls durch die Endbedingung begründet, denn der über q_P hinausgehende Speicherinhalt verfällt zur Zeit T wertlos und sollte bis dahin verkauft werden. Die zugehörigen Erlöse wachsen mit der Kapazität. Die im rechten Teil der Abbildung 3.20 dargestellte Abhängigkeit der Wertfunktion vom Energiepreis s für fixierten Füllstand $q_0 = 135 > q_P$ zeigt ebenfalls das Anwachsen des Speicherwertes mit dem Füllstand sowie das uneinheitliche Monotonieverhalten bezüglich s , welches bereits in Abschnitten 3.2 und 3.4 diskutiert wurde.

Die Abbildung 3.21 zeigt die optimale Steuerung in Abhängigkeit vom Füllstand q und dem Energiepreis s zur Zeit $t_0 = 0$ (oben), sowie als Funktion der Zeit t und des Preises s für fixierten Füllstand $q_0 = 135$ (unten). Die oberen Abbildungen zeigen, dass die kritischen Preise, welche die Bereiche „Kaufen“, „Warten“ und „Verkaufen“ trennen, mit wachsender Kapazität A_S für $q < q_P$ steigen und für $q > q_P$ fallen. Ist der Speicher zu Beginn noch nicht bis zur Mindestreserve q_P befüllt, so ist der Manager eines größeren Speichers bereit, das Auffüllen auch bei höheren Preisen zu beginnen, da das Anheben des Füllstandes auf das Niveau q_P länger dauern wird als bei einem kleineren Speicher (siehe Tabelle 3.5). Ein Verkaufen von Energie kommt nicht bzw. erst bei extrem hohen Preisen in Frage, da die Erlöse nicht die Kosten einer möglichen Strafzahlung decken werden. Ist der Speicher dagegen bereits über q_P befüllt, so lohnt sich bei höherer Kapazität ein Verkauf von Energie bereits bei niedrigeren Preisen, da ansonsten ein wertloser Verfall des Speicherinhaltes über dem Niveau q_P zur Zeit T droht. Die im unteren Teil der Abbildung 3.21 dargestellten Abhängigkeiten der Steuerung von der Zeit für einen fixierten Füllstand $q_0 = 135$ über der Mindestreserve q_P zeigen, dass der Zeitpunkt, ab dem der Speicher unabhängig vom Energiepreis und mit maximaler Rate entleert wird, mit wachsender Kapazität immer früher ist. Dies korrespondiert mit den in Tabelle 3.5 angegebenen wachsenden Zeiten für das Entleeren des Speichers bis zur Mindestreserve q_P .

3.4.6 Sensitivität bezüglich der Endbedingung

In diesem letzten Abschnitt zur Sensitivitätsanalyse soll der Einfluss der Endbedingung $V(T, q, s) = \Phi(q, s)$, welche die Bewertung des Speichers am Ende des betrachteten Zeitintervalls $[0, T]$ festlegt, auf die Wertfunktion und die optimale Steuerung untersucht werden. Hierzu wird das Kontrollproblem mit drei verschiedenen Endbedingungen betrachtet. Dies ist einerseits die in den bisherigen Studien verwendete Strafzahlung

$$\Phi(q, s) = \begin{cases} h_P(s)\mathcal{E}_P(q), & q < q_P, \\ 0, & q \geq q_P, \end{cases}$$

mit $q_P = 125$, $h_P(s) = 1.2 \cdot s$ und der Energie $\mathcal{E}_P(q)$, welche die Pumpe verbraucht, um den Füllstand auf das Niveau q_P zu heben. Darüber hinaus werden der wertlose Verfall des Speichers mit $\Phi(q, s) = 0$ und die Speicherauflösung betrachtet, bei welcher der zur Zeit T im Speicher befindliche Inhalt vollständig zum „Liquidationspreis“ $h_L(S_T) = 0.8 \cdot S_T$ verkauft wird. Dies

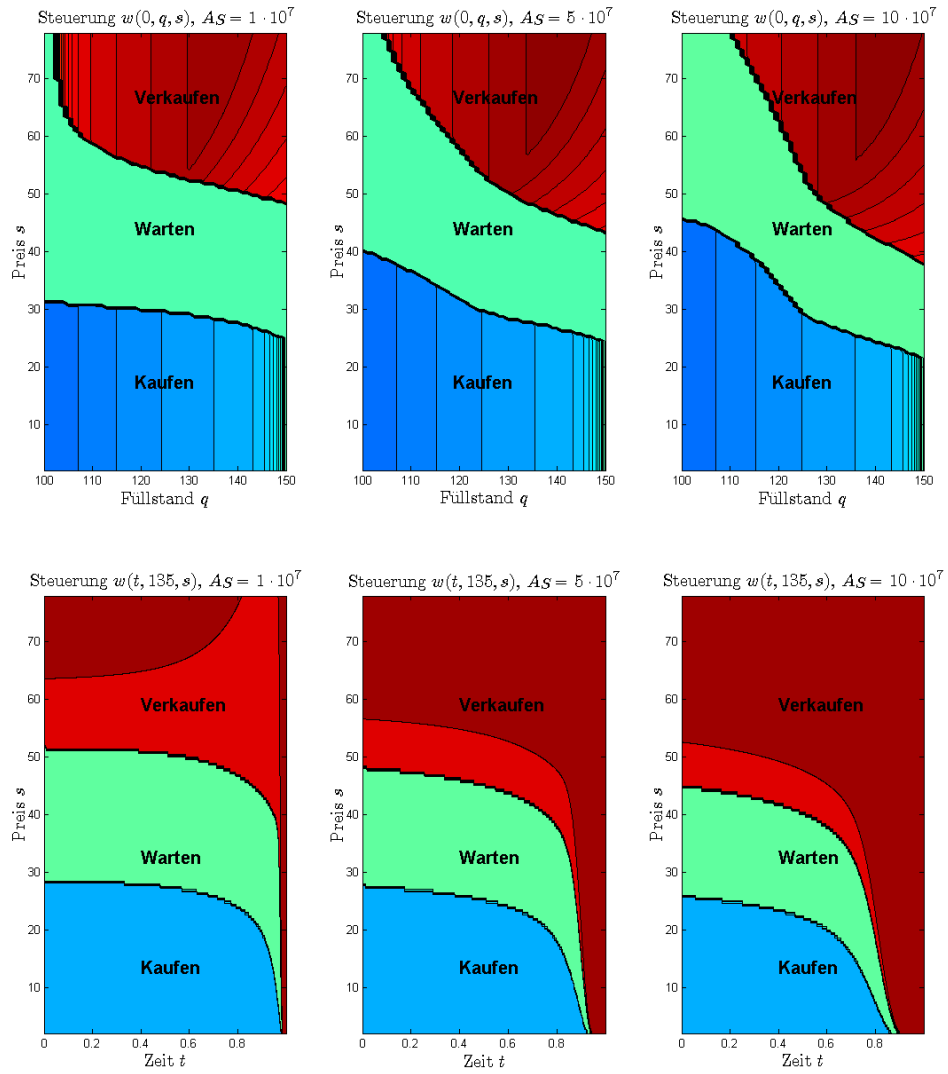


Abbildung 3.21: Optimale Steuerung in Abhängigkeit vom Füllstand q und vom Energiepreis s für fixiertes $t_0 = 0$ (oben) und von der Zeit t und vom Energiepreis s für fixiertes $q_0 = 135$ (unten) und unterschiedliche $AS \in \{1 \cdot 10^7, 5 \cdot 10^7, 10 \cdot 10^7\}$.

führt zu $\Phi(q, s) = h_L(s)\mathcal{E}_L(q)$, wobei $\mathcal{E}_L(q)$ die Energie bezeichnet, welche die Turbine beim Ablassen des mit dem Füllstand $Q_T = q$ gefüllten Speichers produziert. Für die Details der Berechnung der Energien $\mathcal{E}_P(q)$ und $\mathcal{E}_L(q)$ sei auf die Beispiele 1.1.11 und 1.1.12 verwiesen. Eine graphische Darstellung der Funktionen Φ wurde bereits in Abbildung 3.1 präsentiert. Abbildung 3.22 zeigt für die drei gewählten Endbedingungen die Verläufe der Wertfunktion in Abhängigkeit vom Füllstand q (oben) und vom Preis s (unten), jeweils für Zeitpunkte $t_0 = 0, 0.9, 0.95$ und den Endzeitpunkt $T = 1$, für den $V = \Phi$ gilt. Es fällt auf, dass sichtbare Unterschiede in der Wertfunktion für den Verfall bzw. die Speicherauflösung erst kurz vor dem Endzeitpunkt entstehen, für den sich die Funktionen $V = \Phi$ deutlich unterscheiden. Für die Strafzahlung ist die Wertfunktion dagegen deutlich kleiner und für $q < q_P$ sind auch negative Werte möglich. Der Grund für den erstgenannten Effekt ist, dass bei Speicherauflösung zwar eine Vergütung des Inhaltes erfolgt, jedoch werden lediglich 80% des Marktpreises S_T zum Endzeitpunkt gezahlt. Daher ist der Speichermanager bestrebt, kurz vor T einen möglichst leeren Speicher zu besitzen, da ein den Preisabschlag kompensierender Anstieg des Energiepreises sehr unwahrscheinlich ist. Damit befindet er sich (nahezu) in der gleichen Situation wie der Manager eines Speichers, der zu T wertlos verfällt. Im vorliegenden Beispiel dauert die vollständige Entleerung des Speichers 27 Tage ausgehend von einem Füllstand $q_0 = 135$.

Die kleinen und für $q < q_P$ auch negativen Werte von V im Falle der Strafzahlung erklären sich aus den potentiellen Kosten, welche auf den Speichermanager im Falle eines Endfüllstandes Q_T unterhalb der Mindestreserve q_P zukommen. Es sei noch bemerkt, dass sich die Nichtnegativität der Wertfunktionen im Falle der Auflösung bzw. des Verfalls u.a. aus der Tatsache ergibt, dass die Steuerung $u_0 \equiv 0$ zulässig ist und $0 = J(t, \cdot; u_0) \leq V(t, \cdot)$ gilt. Wegen der Verwendung von monotonen Differenzenschemata bleibt die Nichtnegativität der Wertfunktion auch bei der näherungsweisen Lösung der HJB-Gleichung erhalten (siehe Theorem 2.2.4 in Abschnitt 2.2.4).

Abbildung 3.23 zeigt die optimalen Steuerungen in Abhängigkeit vom Füllstand q und vom Energiepreis s zur Zeit $t_0 = 0.9$ (oben) und als Funktion der Zeit $t \in [0.9, 1)$ und des Energiepreises s für fixierten Füllstand $q_0 = 135$ (unten). Es fällt auf, dass bei einem wertlosen Verfall des Speichers der Manager (im Vergleich zur Auflösung bzw. Strafzahlung) zeitiger und auch zu niedrigeren Preisen mit dem Entleeren des Speichers und dem Verkauf der Energie beginnt. Insbesondere erfolgt ab dem Zeitpunkt $t_0 = 0.96$ (d.h. in den letzten 15 Tagen) die Entleerung praktisch unabhängig vom Energiepreis. Im Falle der Speicherauflösung sind diese Effekte ähnlich, allerdings weniger deutlich ausgeprägt. Hier wird bei Preisen $s < \mu$ noch auf ein Ansteigen der Preise bis zum Endzeitpunkt spekuliert und gewartet bzw. bei extrem niedrigen Preisen sogar noch zugekauft. Ist der Preisanstieg hinreichend groß, dann kann trotz des Preisabschlages von 20% bei der Speicherauflösung ein Gewinn erwirtschaftet werden. Im Falle der Strafzahlung fällt auf, dass zur Zeit $t_0 = 0.9$ für Füllstände $q < q_P$ lediglich Energie gekauft oder gewartet wird (falls die Preise zu hoch sind). Ein Verkaufen von Energie in dieser Situation lohnt sich nicht, da den dabei erzielten Gewinnen höhere Kosten durch die Strafzahlung gegenüberstehen. An der Stelle $q = q_P$ zeigt die optimale Steuerung (als Funktion von q und s) einen Strukturbruch. Für $q > q_P$ erfolgt ein Zukauf von Energie erst bei deutlich kleineren Preisen ($s \approx 20$), während bereits für Preise knapp über dem Gleichgewichtsniveau μ eine Entleerung erfolgt. Dies ist durch den wertlosen Verfall des über die Mindestreserve q_P hinaus-

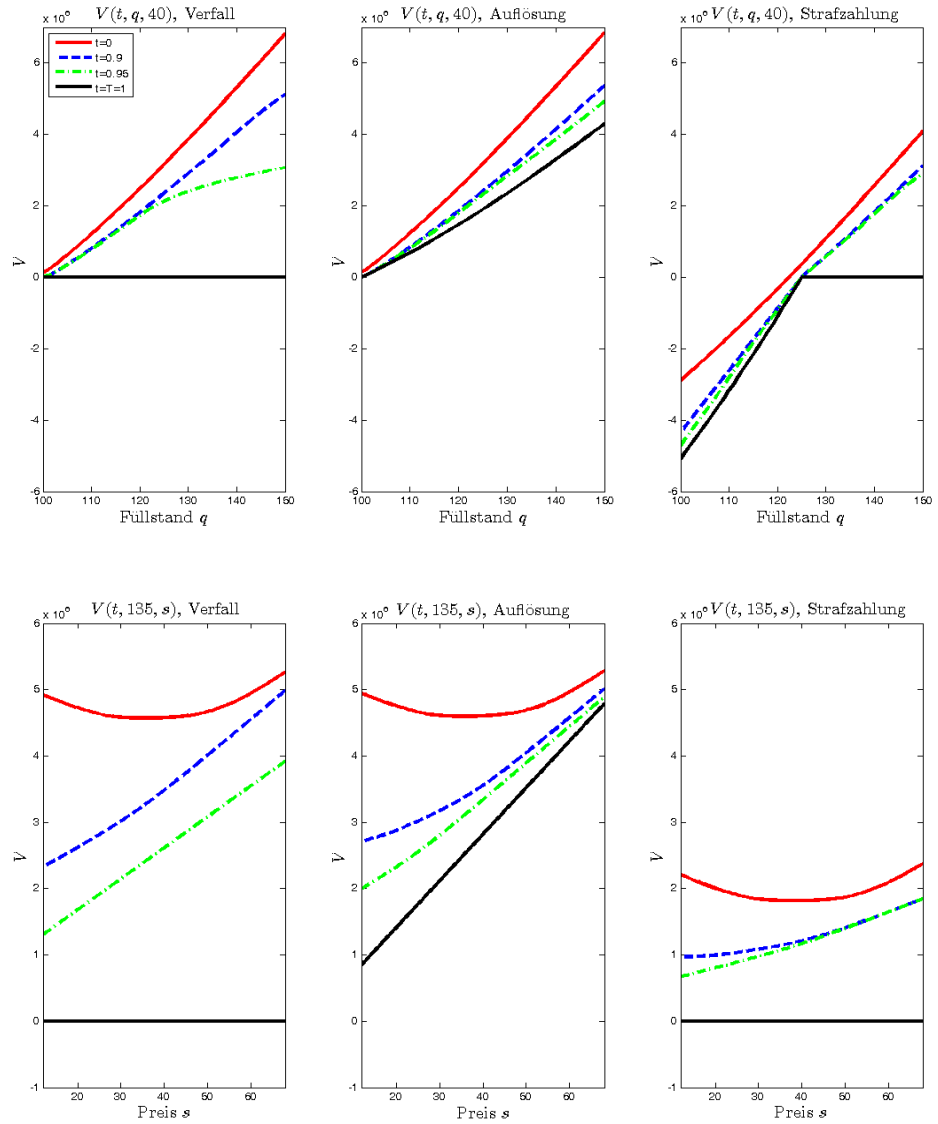


Abbildung 3.22: Wertfunktion als Funktion des Füllstandes q (oben) und des Energiepreises s (unten) für fixierte $s_0 = 40$ bzw. $q_0 = 135$ und unterschiedliche Zeitpunkte $t \in \{0, 0.9, 0.95, 1\}$.

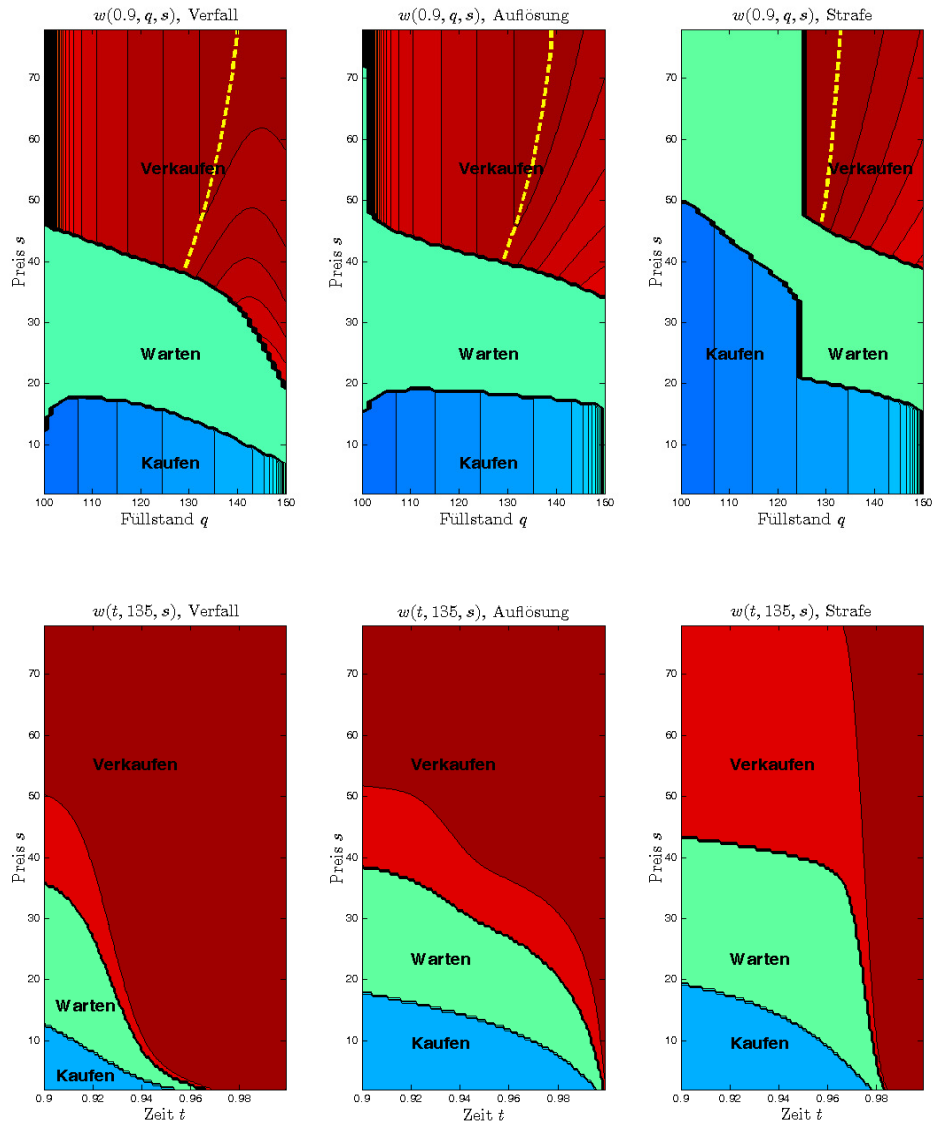


Abbildung 3.23: Optimale Steuerung in Abhängigkeit vom Füllstand q und vom Energiepreis s für fixiertes $t_0 = 0.9$ (oben) und von der Zeit t und vom Energiepreis s für fixiertes $q_0 = 135$ (unten) und unterschiedliche Endauszahlungsfunktionen Φ .

gehenden Speicherinhaltes begründet. Aus dem gleichen Grund erfolgt auch ab einem Zeitpunkt $t_0 = 0.98$, d.h. in den letzten 7–8 Tagen, ein Verkauf von Energie unabhängig vom Energiepreis. Dies korrespondiert mit der Dauer von 7 Tagen für das Absenken des Füllstandes von $q_0 = 135$ auf das Niveau $q_P = 125$.

3.5 Policy Improvement

Am Ende dieses Kapitels werden numerische Ergebnisse aus der näherungsweise Lösung des Optimalsteuerungsproblems mit Hilfe des Policy-Improvement-Verfahrens präsentiert. Dies erfolgt exemplarisch für ein Modell mit konstanten Driftparametern μ und κ in der SDE für den Energiepreis, d.h. für ein Kontrollproblem mit der zweidimensionalen Zustandsvariablen $x = (q, s)$. In Abschnitt 3.5.1 wird der Fall eines endlichen Zeithorizontes untersucht. Anschließend greift Abschnitt 3.5.2 die bereits in Abschnitt 3.3 enthaltenen Betrachtungen zum Problem mit unendlichem Zeithorizont auf und setzt diese fort. In beiden Fällen werden die Entwicklung der Näherungen $J^{(k)}$ und $w^{(k)}$ für die Wertfunktion und die optimale Steuerung mit fortschreitender Iterationszahl k des Policy-Improvement-Verfahrens untersucht. Für endlichen Zeithorizont erfolgt außerdem noch ein Vergleich mit den Ergebnissen aus der numerischen Lösung der HJB-Gleichung mit Hilfe der Semi-Lagrange-Methode.

3.5.1 Endlicher Zeithorizont

Ausgehend vom Kontrollproblem mit endlichem Zeithorizont sollen die Näherungen $J^{(k)}$ und $w^{(k)}$ für wachsende Iterationszahl k untersucht und mit den Näherungen V und w aus der numerischen Lösung der HJB-Gleichung verglichen werden. Dies erfolgt für das bereits in Abschnitt 3.4 betrachtete Kontrollproblem ohne Regularisierung der SDE für den Füllstand Q . Für die Parameter des Energiepreismodells werden $\mu = 40$, $\kappa = 15$ und $\sigma = 50$ für das Berechnungsgebiet $\mathcal{X}^D = [\underline{q}, \bar{q}] \times [\underline{s}, \bar{s}] = [100, 150] \times [12, 68]$ und für die Diskretisierungsparameter $N_q = 50$ und $N_s = 112$ gewählt. Der endliche Zeithorizont ist wieder $T = 1$. Das Zeitintervall $[0, T]$ wird mit der Zeitschrittweite $\Delta\tau = \frac{1}{3 \cdot 365}$ in $N_\tau = 1095$ Teilintervalle zerlegt. Die Endbedingung ist weiterhin durch die Strafzahlung für die Füllstände $q < q_P = 125$ gegeben.

Das Policy-Improvement-Verfahren für das Kontrollproblem mit endlichem Zeithorizont ist analog zu dem in Abschnitt 2.2 vorgestellten Verfahren für unendlichen Zeithorizont. Allerdings ist nun in jedem Iterationsschritt anstelle der PDE (2.72) eine zeitabhängige lineare PDE für die Zielfunktion $J^{(k)}(t, q, s) := J(t, q, s; w^{(k)}(t, q, s))$ numerisch zu lösen. Hierfür wird ein implizites Differenzenschema verwendet. Als Startnäherung wird die Steuerung $w^{(0)} \equiv 0$ und für das Abbruchkriterium werden $\delta_J = 0.01$, $\delta_u = 0.001$ und $k_{\max} = 100$ gewählt.

Abbildung 3.24 zeigt im oberen Teil den Verlauf der Zielfunktion $J^{(k)}(t, q, s)$ in Abhängigkeit von q für fixierten Energiepreis $s_0 = \mu = 40$ (links) und in Abhängigkeit von s für fixierten Füllstand $q_0 = 135$ (rechts) jeweils zur Zeit $t_0 = 0$ für verschiedene Iterationszahlen k . Zum Vergleich ist auch die Lösung der HJB-Gleichung, welche mit Hilfe der Semi-Lagrange-Methode erhalten wird, eingezeichnet. Die Ergebnisse zeigen, dass die Zielfunktionen $J^{(k)}$ schnell größer werden und sich der Wertfunktion V annähern, bereits für $k = 3$ sind nur noch geringe Unterschiede zu erkennen. Beim Abbruch der Iteration nach $k = 11$ Schritten gilt für

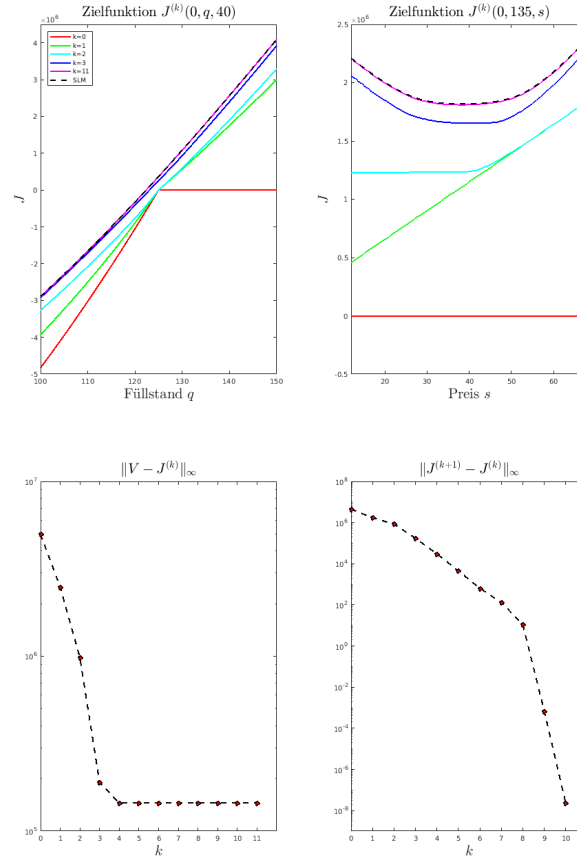


Abbildung 3.24: Oben: Zielfunktionen $J^{(k)}$ und Wertfunktion V zur Zeit $t_0 = 0$ in Abhängigkeit von q für fixiertes $s_0 = 40$ (links) und in Abhängigkeit von s für fixiertes $q_0 = 135$ (rechts). Unten: Diskrete Maximum-Normen der Differenz $V - J^{(k)}$ (links) und der „Verbesserung“ $J^{(k+1)} - J^{(k)}$ (rechts) in Abhängigkeit von k .

die diskrete Maximum-Norm (bezüglich t , q und s) der Differenz $\|V - J^{(k)}\|_\infty \approx 1.5 \cdot 10^5$. Der linke Teil von Abbildung 3.25 zeigt den absoluten Fehler $|V(0, q, s) - J^{(k)}(0, q, s)|$ zur Zeit $t = 0$ in Abhängigkeit von q und s . Der Vergleich der maximalen absoluten Fehler in der Größenordnung von 3700 mit den Werten von V im Bereich von -3 Millionen bis 5 Millionen macht deutlich, dass die Fehler für praktische Zwecke vernachlässigbar sind. Der untere Teil von Abbildung 3.24 zeigt das Abklingen der Differenzen $V - J^{(k)}$ (links) und die „Verbesserungen“ der Zielfunktion, d.h. die Differenzen $J^{(k+1)} - J^{(k)}$ aufeinanderfolgender Iterierten der Zielfunktion (rechts), jeweils in der diskreten Maximum-Norm und in logarithmischer Darstellung. Auch hier bestätigt sich wieder die rasche Annäherung der $J^{(k)}$ an V . Die „Stabilisierung“ des Fehlers $\|V - J^{(k)}\|_\infty$ bei einem Wert von etwa $1.5 \cdot 10^5$ für $k \geq 4$ ist durch die Diskretisierungsfehler bei der numerischen Lösung der linearen PDE für $J^{(k)}$ und der nichtlinearen HJB-Gleichung für V begründet.

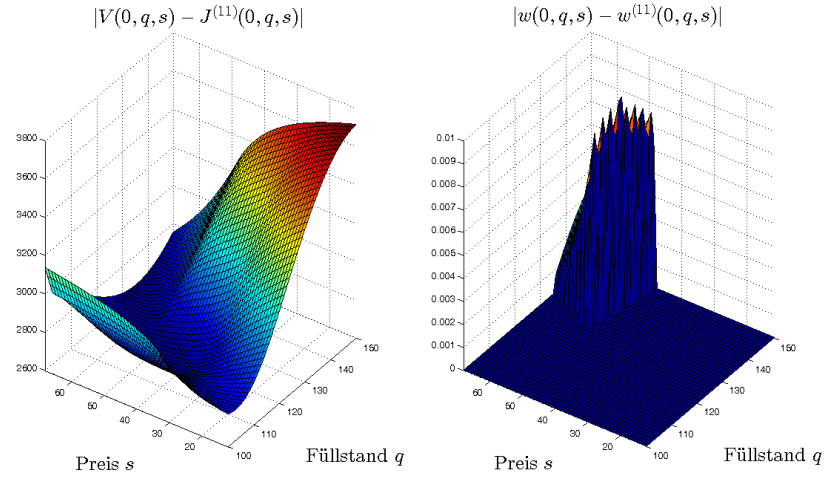


Abbildung 3.25: Absoluter Fehler $|V - J^{(k)}|$ der Wertfunktion (links) und $|w - w^{(k)}|$ der optimalen Steuerung (rechts) für $t_0 = 0$, $T = 1$ und $k = 11$.

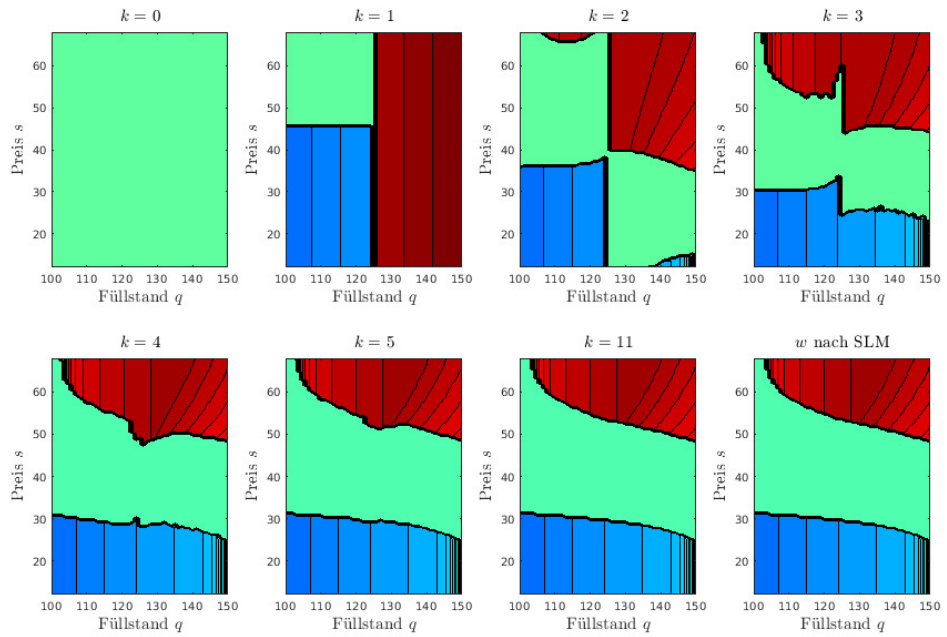


Abbildung 3.26: Steuerung $w^{(k)}(t, q, s)$ in Abhängigkeit von q und s für fixiertes $t_0 = 0$ im k -ten Iterationsschritt des Policy-Improvement-Verfahrens und optimale Steuerung w .

Abbildung 3.26 zeigt verschiedene Iterierte der Steuerung $w^{(k)}$ zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ in Abhängigkeit von q und s sowie die sich aus der HJB-Gleichung ergebende optimale Steuerung w . Auch hier zeigen sich die markantesten Änderungen in den Steuerungen $w^{(k)}$ in den ersten Iterationen $k = 1, \dots, 5$. Danach erfolgt eine Stabilisierung und es sind nur noch Änderungen für Füllstände q in der Umgebung der Mindestreserve q_P sichtbar. Beim Abbruch der Iteration für $k = 11$ stimmt $w^{(k)}$ augenscheinlich mit der optimalen Steuerung überein. Erst die im rechten Teil von Abbildung 3.25 gezeigte Differenz $|w - w^{(11)}|$ zeigt kleinere Abweichungen in dem Bereich, in dem die optimale Steuerung gleich der „effektiven“ Rate y_+ ist. Dagegen sind in den Bereichen, in denen gekauft, gewartet bzw. mit maximaler Rate verkauft wird, die Fehler gleich Null.

Die Berechnung von $J^{(k)}(t, q, s)$ nach Policy-Improvement-Algorithmus benötigt auf einem PC mit CPU Intel Xeon E5-2667V2 und der Taktfrequenz 3.3 GHz ungefähr 34 Minuten. Insbesondere sind für eine Iteration im Mittel etwa 170 Sekunden erforderlich. Zum Vergleich braucht die Lösung V der HJB-Gleichung mit Hilfe der Semi-Lagrange-Methode nur 17 Sekunden.

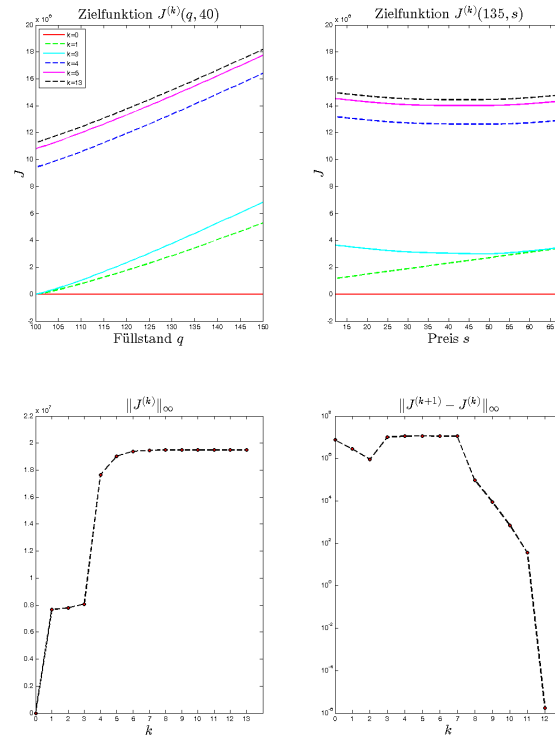


Abbildung 3.27: Oben: Zielfunktionen $J^{(k)}$ in Abhängigkeit von q für fixiertes $s_0 = 40$ (links) und in Abhängigkeit von s für fixiertes $q_0 = 135$ (rechts).

Unten: Diskrete Maximum-Normen von $J^{(k)}$ (links) und der „Verbesserung“ $J^{(k+1)} - J^{(k)}$ (rechts) in Abhängigkeit von k .

3.5.2 Unendlicher Zeithorizont

Analog zum Vorgehen in Abschnitt 3.5.1 werden nun für das Kontrollproblem mit unendlichem Zeithorizont die Iterierten $J^{(k)}$ der Zielfunktionen und die zugehörigen Steuerungen $w^{(k)}$ genauer analysiert. Hierzu wird die in Abschnitt 3.3 begonnene Studie für das Kontrollproblem mit einer regularisierten SDE für den Füllstand mQ fortgesetzt. Dabei wird der Regularisierungsparameter $m = 10^8$ gesetzt, d.h. ein sehr schwach regularisiertes Problem betrachtet. Mit den wie in Abschnitt 3.5.1 gewählten Parametern für das Preismodell, die Diskretisierung und das Abbruchkriterium erfolgt der Abbruch des Policy-Improvement-Verfahrens nach $k = 13$ Iterationen. Wegen der in dieser Studie verwendeten Regularisierung der SDE für den Füllstand Q wird als Berechnungsgebiet \tilde{Q}^D das Intervall $[q - \varepsilon_1, \bar{q} + \varepsilon_1] = [90, 160]$ verwendet, welches mit der Ortschaftweite $\Delta_q = 1$ in $N_q = 70$ Teilintervalle zerlegt wird. Die Ergebnisse in den Abbildungen werden jedoch nur für Füllstände q aus $\mathcal{Q} = [q, \bar{q}] = [100, 150]$ präsentiert.

Abbildung 3.27 zeigt im oberen Teil die Zielfunktionen $J^{(k)}(q, s)$ in Abhängigkeit von q für fixiertes $s_0 = \mu = 40$ (links) und in Abhängigkeit von s für fixiertes $q_0 = 135$ (rechts) für verschiedene k . Sichtbare Verbesserungen der Zielfunktion ergeben sich nur in den ersten 5 Iterationen, danach werden sie immer kleiner. Dies zeigen auch die im unteren Teil der Abbildung dargestellten Fehlerplots mit den diskreten Maximum-Normen der $J^{(k)}$ und der „Verbesserungen“ $J^{(k+1)} - J^{(k)}$ in Abhängigkeit von k .

Abbildung 3.28 zeigt Iterierte der Steuerung $w^{(k)}$ in Abhängigkeit von q und s . Ausgehend von der Startnäherung $w^{(0)} \equiv 0$ zeigen sich auch hier sichtbare Änderungen in den ersten 5 – 7 Iterationen, danach erfolgt eine Stabilisierung.

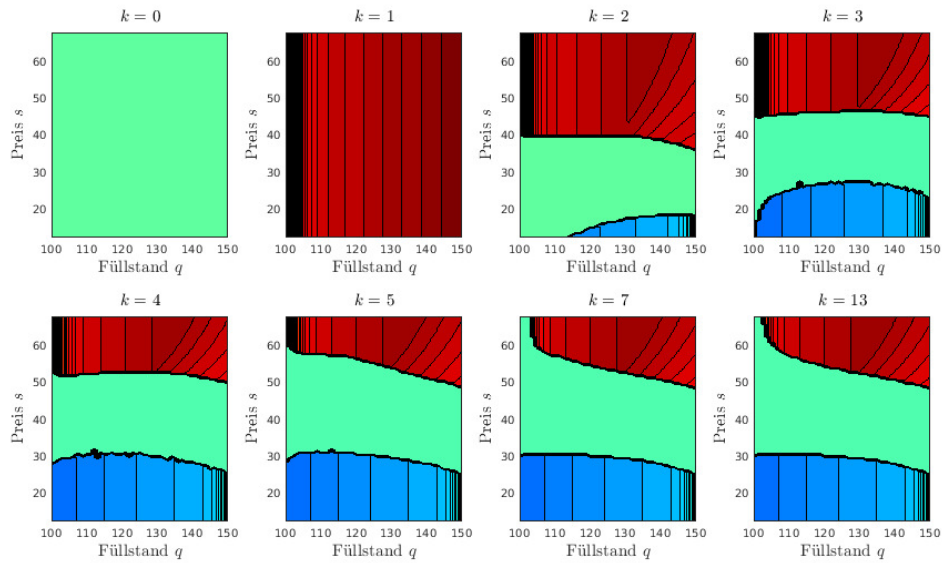


Abbildung 3.28: Steuerung $w^{(k)}(q, s)$ in Abhängigkeit von q und s im k -ten Iterationsschritt des Policy-Improvement-Verfahrens.

Zusammenfassung

In der Dissertation wurde ein stochastisches Optimalsteuerungsproblem unter partieller Information untersucht, welches im Zusammenhang mit der optimalen Bewirtschaftung eines Energiespeichers entsteht. Um Änderungen an den ökonomischen Rahmenbedingungen auf dem Energiemarkt im mathematischen Modell für den Energiepreis zu erfassen, wurde dieser durch einen Markov-modulierten Ornstein-Uhlenbeck-Prozess beschrieben, dessen Driftkoeffizienten von einer nicht direkt beobachtbaren Markov-Kette abhängen.

Die Dissertation liefert insbesondere die folgenden Ergebnisse.

- Das stochastische Optimalsteuerungsproblem unter partieller Information kann durch Erweiterung des Zustandes um den Filter für die unbeobachtbare Markov-Kette in ein Problem mit vollständiger Information überführt werden. Die Anwendung von Techniken des Dynamic Programming liefert als notwendige Optimalitätsbedingung die HJB-Gleichung, welche im Diffusionsteil entartet ist.
- Mit Hilfe von Regularisierungstechniken, bei denen in der Zustandsgleichung „kleine“ Stör- bzw. Rauschterme hinzugefügt werden, wird dem Ausgangsproblem ein Optimalsteuerungsproblem mit einer im Diffusionsteil streng elliptischen HJB-Gleichung gegenübergestellt. Es gelingt zu zeigen, dass für gegen null gehende Störterme die Wertfunktion des regularisierten Problems gegen die des Ausgangsproblems konvergiert. Dies ist die Grundlage für die Konstruktion von ε -optimalen Steuerungen.
- Für die ε -optimalen Steuerungen wird eine geschlossene Darstellung in Form einer Markov'schen Entscheidungsregel in Abhängigkeit von der Wertfunktion gefunden. Diese beschreibt die intuitive ökonomische Regel „buy low and sell high“ in einer mathematisch präzisen Form.
- Die Bestimmung der Wertfunktion erfolgt durch numerische Lösung der HJB-Gleichung mit Hilfe von Differenzenverfahren für ein Energiepreismodell, dessen Driftkoeffizien-

ten durch eine Markov-Kette mit zwei Zuständen modelliert werden. Für den Fall eines endlichen Zeithorizontes wird für die regularisierte Gleichung ein explizit-implizites Differenzenschema und für die unregularisierte Gleichung ein implizites Semi-Lagrange-Approximationsschema entwickelt. Für die Aufgaben mit unendlichem Zeithorizont wird außerdem der Policy-Improvement-Algorithmus benutzt, welcher eine Folge von linearen PDEs erzeugt. Diese werden exemplarisch für ein Modell mit voller Information wiederum mit Hilfe von Differenzenschemata numerisch gelöst.

- Für alle entwickelten Differenzenschemata erfolgt der Nachweis, dass sie über die Eigenschaften Stabilität, Monotonie und Konsistenz verfügen und somit konvergent sind.
- Mit den erstellten MATLAB-Implementierungen und den damit durchgeführten numerischen Experimenten wurde nachgewiesen, dass durch geeignete numerische Verfahren das vorgelegte Optimalsteuerungsproblem mit drei Zustandsvariablen auf Standard-PCs durch Lösung der zugehörigen HJB-Gleichung schnell und in guter Näherung gelöst werden kann.
- Die numerischen Experimente zur Lösung der regularisierten Probleme mit verschiedenen Regularisierungsparametern bestätigen die theoretischen Konvergenzresultate für die Wertfunktion und weisen auf eine schnelle Konvergenz hin. Obwohl für die optimalen Steuerungen keine vergleichbaren theoretischen Konvergenzresultate gefunden wurden, zeigen die Ergebnisse auch eine schnelle Annäherung der optimalen Steuerungen an die Steuerung, welche aus der numerischen Lösung der unregularisierten HJB-Gleichung erhalten wird. Dies motiviert, die vorgelegten Optimalsteuerungsprobleme durch numerische Lösung der unregularisierten HJB-Gleichung mit Hilfe des sehr effizienten impliziten Semi-Lagrange-Approximationsschemas zu lösen.
- Mit den numerischen Experimenten zum Policy-Improvement-Algorithmus für das Optimalsteuerungsproblem mit endlichem Zeithorizont in Abschnitt 3.5.1 werden durch ein alternatives Lösungsverfahren die Ergebnisse, welche durch direktes Lösen der HJB-Gleichung mit Hilfe des impliziten Semi-Lagrange-Approximationsschemas erhalten werden, bestätigt. Eine zusätzliche Bestätigung liefern die Ergebnisse der in Abschnitt 3.3 durchgeführten Studie. Diese zeigen, dass die Wertfunktionen und optimalen Steuerungen für Probleme mit endlichem aber sehr großem Zeithorizont T sehr gut durch die entsprechenden Größen für das zugehörige Kontrollproblem mit unendlichem Zeithorizont approximiert werden können.

Ausblick

Ausgehend von den Untersuchungen in dieser Arbeit bieten sich folgende Themen für zukünftige Forschungen an.

- **Alternative Energiepreismodelle**

- *Exponentieller OU-Prozess.* Eine einfache Möglichkeit negative Werte in der Energiepreismodellierung zu verhindern ist der Übergang von dem in der Arbeit verwendeten OU-Prozess zu einem exponentiellen OU-Prozess. In der Literatur wird das z.B. in Benth, Lempa u. Nilssen [7] und Carmona u. Ludkovski [10] betrachtet.
- *Saisonale Schwankungen.* Zu den typischen Eigenschaften von Energiepreisen gehören deren saisonale Schwankungen. Im Gegensatz zu den stochastischen Fluktuationstermen sind diese bekannt und vorhersehbar und können durch deterministische zeitabhängige Terme im Driftkoeffizienten des Energiepreisprozesses erfasst werden. Diese lassen sich leicht in die in der Dissertation betrachteten Lösungsverfahren einbauen und führen zu keinen qualitativen Änderungen. In der Literatur wird das z.B. in Chen u. Forsyth [12, 13], Eriksson, Lempa u. Nilssen [23], Erlwein, Benth u. Mamon [24], Thompson, Davison u. Rasmussen [69, 70] betrachtet.
- *Modelle mit Sprüngen.* Eine weitere Eigenschaft von Energiepreisen ist das Auftreten von gelegentlichen sprunghaften Änderungen und von sogenannten Spikes. Für deren Modellierung eignen sich z.B. Sprung-Diffusionsprozesse. Stochastische Kontrollprobleme mit solchen Sprung-Diffusionsprozessen werden z.B. in Øksendal u. Sulem [52] betrachtet und führen auf HJB-Gleichungen in Gestalt einer partiellen Integro-Differentialgleichung (PIDE). Numerische Lösungen solcher PIDE mit Hilfe von Differenzenschemata werden z.B. in Cont u. Voltchkova [17] und D’Halluin, Forsyth u. Labahn [20] und Schütze [63] betrachtet.
- *Gaußscher Faktorprozess.* Eine weitere Möglichkeit für die Wahl des Faktorprozesses zur Modellierung der ökonomischen Rahmenbedingungen besteht in der Verwendung eines Gaußschen Prozesses mit einem linearen Driftterm anstelle der in dieser Arbeit untersuchten Markov-Kette. Das zugehörige Filterproblem führt dann auf den Kalman-Filter. Derartige Modelle werden bereits in der Literatur zu stochastischen Kontrollproblemen unter partieller Information in der Portfoliooptimierung eingesetzt, z.B. in Brendle [9], Gabih et al. [31], Lakner [47] und Sass, Westphal u. Wunderlich [62].
- *Expertenmeinungen.* Zur Verbesserung der Genauigkeit der Schätzung bzw. des Filters für den unbeobachtbaren Faktorprozess bietet es sich an, neben den am Markt beobachtbaren Energiepreisen auch noch zusätzliche am Markt verfügbare Informationen über die unbekannten Driftparameter zu verwenden. Derartige Modelle, in denen die Zusatzinformationen oft als Expertenmeinungen bezeichnet werden, sowie darauf aufbauende stochastische Kontrollprobleme unter partieller Information wurden in den letzten Jahren für Anwendungen in der Portfoliooptimierung betrachtet (siehe Frey et al. [29, 30] und Gabih et al. [31]). Sie können auch auf das in der Dissertation untersuchte Kontrollproblem für einen Energiespeicher übertragen werden.

Werden der Faktorprozess durch eine Markov-Kette und die Expertenmeinungen durch einen markierten Punktprozess modelliert, so entsteht eine HJB-Gleichung in Form einer PIDE (siehe [29, 30]).

- *Beobachtbarer Faktorprozess.* Für die Quantifizierung der ökonomischen Verluste, welche durch die unvollständige Beobachtbarkeit des Faktorprozesses entstehen, ist es erforderlich auch das Kontrollproblem für einen Preisprozess mit einem beobachtbaren Faktorprozess zu lösen. Für den Fall einer Markov-Kette werden solche Probleme z.B. in Bäuerle u. Rieder [4] und Sotomayor u. Cadenillas [67] betrachtet. Für das Modell mit einem Gaußschen Driftprozess sei auf Kim u. Omberg [44] verwiesen.

- **Pumpspeicher mit natürlichem Zufluss**

Die Einbeziehung eines natürlichen Zuflusses in das Oberbecken eines Pumpspeichers, wie sie im ersten Kapitel dieser Arbeit betrachtet wurde, führt auf ein Kontrollproblem mit den Zustandsvariablen Q, S, Π und Z . Im einfachsten Fall einer Markov-Kette mit $d = 2$ Zuständen enthält die zugehörige HJB-Gleichung dann bereits vier Ortsvariablen und auch die zugehörigen gemischten partiellen Ableitungen. Für deren effiziente numerische Lösung sind dann neue Verfahren einzusetzen, welche nachfolgend beschrieben werden. Ähnliche Probleme zur Steuerung der Energieproduktion von Wasserkraftwerken mit einem natürlichen Zufluss in den Stauraum werden in der Literatur z.B. in Chen u. Forsyth [13] und Zhao u. Davison [75, 76] betrachtet.

- **Höherdimensionaler Zustand**

Für Kontrollprobleme mit mehr als drei Zustandsvariablen stößt die numerische Lösung der zugehörigen HJB-Gleichungen mit den in der Dissertation betrachteten explizit-impliziten bzw. impliziten Semi-Lagrange-Differenzenschemata an die Grenzen des Machbaren. Die benötigten Rechenzeiten und der Bedarf an Hauptspeicher steigen stark an. Für solche Probleme müssen dann alternative numerische Lösungsverfahren herangezogen werden. Eine Möglichkeit besteht darin, zunächst die im Diffusionsteil der HJB-Gleichung auftauchenden gemischten Ableitungen der Wertfunktion durch eine Transformation der Zustandsvariablen (Rotation des Koordinatensystems) zu eliminieren (siehe Company u.a. [15] und Zvan, Forsyth u. Vetzal [77]). Anschließend erfolgt die Diskretisierung der HJB-Gleichung mit den transformierten Ortsvariablen mit Hilfe von Splitting-Methoden. Derartige Splitting-Verfahren werden in der Literatur z.B. in Duffy [21], Hentjens u. in 't Hout [33], Halperin u. Itkin [34], Ikonen u. Toivanen [38, 39, 40], in 't Hout u. Foulon [41], in 't Hout u. Welfert [42, 43], McKee, Wall u. Wilson [50], Toivanen [71] und Ware [73] betrachtet.

- **Existenz des optimal gesteuerten Zustandsprozesses X^u**

Zur vollständigen Verifikation von mit Methoden des Dynamic Programming gelösten stochastischen Kontrollproblemen gehört auch der Nachweis der Existenz und Eindeu-

tigkeit einer starken Lösung der mit der optimalen Steuerung gesteuerten Zustandsgleichung. Für die in der Arbeit betrachteten Kontrollprobleme ist diese Aufgabe nicht durch Standard-Argumente lösbar, da die optimale Steuerung eine Bang-Bang-Struktur aufweist und somit die Lipschitz-Bedingung für die Koeffizienten der Zustandsgleichung verletzt ist. In der Literatur wurden für stochastische Differentialgleichungen mit solchen unstetigen Koeffizienten in Leobacher, Szölgyenyi u. Thonhauser [48] eine Reihe von Existenz- und Eindeutigkeitsresultaten gefunden. Hierauf aufbauend konnten in Shardin u. Szölgyenyi [64] Fragen zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Zustandsgleichung für ein Kontrollproblem für einen allgemeinen Energiespeicher beantwortet werden. Ähnliche Überlegungen können auch für das Kontrollproblem für den in der Dissertation betrachteten Pumpspeicher eingesetzt werden.

Optimale Strategie

In diesem Anhang wird der Kandidat $w^*(t, x)$ für die optimale Strategie hergeleitet. Dabei wird nur der Fall betrachtet, bei dem der Energiepreis s und die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial q} V(t, x)$ positiv sind.

Zuerst wird gezeigt, unter welchen Bedingungen, d.h. für welchen Füllstand $q \in \mathcal{Q}$, das innere Maximum y_+ aktiv ist, sodass die Funktion (1.90) an dieser Stelle ihren maximalen Wert annimmt.

Es ist zu beachten, dass unter Verwendung der Reflexionsbedingung $\bar{u}(q) = 0$ die optimale Rate des Volumenstromes $\bar{u}(q)$ beim Ausströmen nach der Formel (1.27) ermittelt wird. Zur Erleichterung der nachfolgenden Herleitung der optimalen Steuerung wird die Hilfsfunktion

$$f(q) = \frac{3c_0 q}{2P_{\text{theo}}} A_{\text{out}} \sqrt{2gq} \left(1 - e^{-\tilde{\alpha}(q-\underline{q})}\right) - 1 \quad (\text{A.1})$$

eingeführt.

Nach dem Einsetzen der Funktion (A.1) in die Bedingung (1.35), die die Positivität des Wirkungsgrades der Turbine garantiert, gilt $f(\bar{q}) \leq 2$. Somit nimmt die Funktion (A.1) für alle $q \in [\underline{q}, \bar{q}]$ Werte aus dem abgeschlossenen Intervall $[-1, 2]$ an, d.h.

$$f(q) \in [-1, 2], \quad \forall q \in [\underline{q}, \bar{q}].$$

Weiterhin ist die Funktion (A.1) auf dem Intervall $[\underline{q}, \bar{q}]$ streng monoton wachsend. Dies impliziert, dass sie auf diesem Intervall eine inverse Funktion f^{-1} besitzt. Dabei muss auch die Bedingung $\bar{q} \leq f^{-1}(2)$ gelten.

Als Nächstes wird geprüft, für welche $q \in \mathcal{Q}$ die Bedingung $0 \leq \bar{u} < y_+$ erfüllt und somit das innere Maximum y_+ nicht zulässig ist. Dazu muss folgende Ungleichung erfüllt sein:

$$A_{\text{out}} \sqrt{2gq} \left(1 - e^{-\tilde{\alpha}(q-\underline{q})}\right) < \frac{2P_{\text{theo}}}{3c_0 q} (1 + \sqrt{1 - \delta}), \quad \delta \leq 1.$$

Diese lässt sich in Hinblick auf die Funktion (A.1) wie folgt umformen:

$$f(q) < \sqrt{1 - \delta}. \quad (\text{A.2})$$

Zur Lösung der Ungleichung (A.2) wird folgende Fallunterscheidung gemacht: $f \in [-1, 0)$ bzw. $f \in [0, 2]$.

1. Fall: $f \in [-1, 0)$. Die Ungleichung (A.2) ist für alle $\delta \leq 1$ stets erfüllt. Somit gilt $\delta \in (-\infty, 1]$ für alle q , die in der Menge $Q_1 = \left\{ q \in [\underline{q}, \bar{q}] \mid f(q) \in [-1, 0) \right\}$ liegen.

2. Fall: $f \in [0, 2]$. In diesem Fall darf man beide Seiten der Ungleichung (A.2) quadrieren, da die linke Seite nichtnegativ ist. Dabei gilt $\delta < 1 - f^2$. Dies bedeutet, dass wegen $\delta \leq 1$ und $f \in [0, 2]$ die Bedingung $\delta \in (-\infty, 1 - f^2)$ für alle q aus der Menge $Q_2 = \left\{ q \in [\underline{q}, \bar{q}] \mid f(q) \in [0, 2] \right\}$ erfüllt sein muss.

Analog kann man die Ungleichung $0 \leq y_+ \leq \bar{u}$ lösen. Die Funktion δ genügt dabei folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} &\text{keine reelle Lösung } \delta, \quad q \in Q_1, \quad f \in [-1, 0), \\ &\delta \in [1 - f^2, 1], \quad q \in Q_2, \quad f \in [0, 2]. \end{aligned}$$

Die obige Fallunterscheidung erlaubt nun, die optimale Strategie beim Ablassen vorläufig wie folgt zu definieren: für $q \in Q_1$ und $\delta \leq 1$ das Wasser mit maximaler Rate $\bar{u}(q)$ ablassen, für $q \in Q_2$ und $\delta < 1 - f^2(q)$ ebenfalls maximal ablassen und bei $\delta \in [1 - f^2(q), 1]$ den Speicher mit der Rate $y_+(t, x)$ entleeren. Es ist zu beachten, dass diese Regel nur die Zulässigkeit des inneren Maximums y_+ angibt. Um schließlich feststellen zu können, unter welchen Bedingungen der Speicher mit der Rate \bar{u} oder y_+ entleert wird, muss betrachtet werden, bei welchen Raten die Funktion (1.90) ihr Maximum annimmt.

Im Weiteren wird festgestellt, unter welchen Bedingungen die Raten des Volumenstromes \bar{u} und y_+ beim Ablassen optimal sind. Hierfür werden folgende Fälle betrachtet.

1. Fall: $q \in Q_1$. Zuerst betrachtet man den Fall, bei dem das innere Maximum inaktiv ist, so dass der Speicher mit der maximalen Rate des Volumenstromes $\bar{u}(q)$ entleert wird. Man beachte, dass dabei die Bedingung $\delta \leq 1$ gilt.

Die Funktion (1.90) hat an der Stelle $y = \bar{u}$ die Gestalt

$$H(\bar{u}) = -h(q)\bar{u}V_q + c_{FS}(q - q_f^+)\bar{u}\eta_{\max} \left(1 - \left(\frac{c_0\bar{u}q}{P_{\text{theo}}} - 1 \right)^2 \right). \quad (\text{A.3})$$

Außerdem gilt $H(0) = 0$. Wenn $H(\bar{u}) \geq H(0)$ gilt, dann ist $H(y)$ auf $[0, \bar{u})$ monoton wachsend und $y = \bar{u}$ ist eine Maximumstelle. In Hinblick auf (A.3) erhält man aus $H(\bar{u}) \geq H(0)$ folgende Ungleichung:

$$\delta \leq \frac{1}{3}(1 + f)(2 - f). \quad (\text{A.4})$$

Bei der Herleitung der Bedingung (A.4) wird verwendet, dass der Energiepreis s positiv ist und für δ die Formel (1.91) gilt. Darüber hinaus ist die rechte Seite der Ungleichung (A.4) für alle $q \in Q_1$ (d.h. für alle $f \in [-1, 0)$) immer kleiner 1. Daraus ergibt sich die optimale Strategie für den Fall des maximalen Ablassens mit $q \in Q_1$:

$$w^*(t, x) = \begin{cases} \bar{u}(q), & \delta(t, x) \in \left(-\infty, \frac{1}{3}(1 + f(q))(2 - f(q))\right], \\ 0, & \delta(t, x) \in \left(\frac{1}{3}(1 + f(q))(2 - f(q)), 1\right]. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

2. Fall: $q \in Q_2$ und $\delta \in (-\infty, 1 - f^2)$. Weiterhin werden die Bedingungen benötigt, unter denen die Ungleichung $H(\bar{u}) \geq H(0)$ in Hinblick auf $\delta < 1 - f^2$ erfüllt ist und der Speicher mit maximaler Rate \bar{u} entleert wird. Man erhält die Ungleichung (A.4), deren rechte Seite mit $1 - f^2$ verglichen wird. Man kann zeigen, dass die Funktion δ für $f \geq \frac{1}{2}$ der Bedingung $\delta \in (-\infty, 1 - f^2)$ und für $f \in [0, \frac{1}{2})$ der Bedingung $\delta \in \left(-\infty, \frac{1}{3}(1 + f)(2 - f)\right]$ genügt.

Zusammen mit der Bedingung (A.5) für $q \in Q_1$ ist die optimale Strategie $w^*(t, x) = \bar{u}(q)$, wenn $\delta(t, x) \in \left(-\infty, \frac{1}{3}(1 + f)(2 - f)\right]$ für alle q aus der Menge $Q_3 = \left\{q \in [\underline{q}, \bar{q}] \mid f(q) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right\}$ gilt. Ansonsten ist es optimal, den Speicher weder zu laden, noch zu entleeren. Dabei gilt $w^*(t, x) = 0$. Der Speicher wird ebenfalls mit der maximalen Rate \bar{u} für $q \in Q_4 = \left\{q \in [\underline{q}, \bar{q}] \mid f(q) \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]\right\}$ und $\delta(t, x) \in (-\infty, 1 - f^2(q))$ entladen.

3. Fall: $q \in Q_2$ und $\delta \in [1 - f^2, 1]$. Im Rahmen dieses Falls betrachtet man die Situation, in der das innere Maximum y_+ aktiv ist. Um die Bedingungen herzuleiten, unter denen die Funktion (1.90) ihre Maximumstelle in $y = y_+$ hat, löst man zuerst die Ungleichung $H(y_+) \geq H(0)$. Zusammen mit den Formeln (1.91) und $y_+ = \frac{2P_{\text{theo}}}{3c_0q}(1 + \sqrt{1 - \delta})$ und mit der Positivität des Preises ($s > 0$) lässt sich die letzte Ungleichung wie folgt darstellen:

$$2\delta - 1 \leq \sqrt{1 - \delta}. \quad (\text{A.6})$$

Zum Lösen der Ungleichung (A.6) betrachtet man zwei Fälle: $\delta < \frac{1}{2}$ und $\delta \geq \frac{1}{2}$. Im ersten Fall gilt die Ungleichung immer, wobei $\delta \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ ist. Im zweiten Falle werden die beiden Seiten von (A.6) quadriert, wodurch man $\delta\left(\delta - \frac{3}{4}\right) \leq 0$ erhält. Zusammen mit den Bedingungen $\delta \geq \frac{1}{2}$ und $\delta \leq 1$ erhält man die Lösungsmenge $\delta \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$. Schließlich liefert die Vereinigung beider Lösungen das zulässige Intervall $\delta \in \left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$.

Nun bleibt noch die Schnittmenge von $[1 - f^2, 1]$ und $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$ zu bilden. Dafür muss man $1 - f^2$ mit $\frac{3}{4}$ vergleichen. Daraus ergibt sich $\delta \in \left[1 - f^2, \frac{3}{4}\right]$ für $f \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ und das innere Maximum $y_+(t, x)$ ist somit für alle $q \in Q_4$ die optimale Strategie. Ansonsten gilt $w^*(t, x) = 0$ für $\delta \in \left(\frac{3}{4}, 1\right]$.

Zusammengefasst lässt sich die optimale Strategie für den Fall des Ablassens für $q \in Q_4$ wie folgt darstellen:

$$w^*(t, x) = \begin{cases} \bar{u}(q), & \delta(t, x) \in \left(-\infty, (1 - f(q))(1 + f(q))\right), \\ y_+(t, x), & \delta(t, x) \in \left[(1 - f(q))(1 + f(q)), \frac{3}{4}\right], \\ 0, & \delta(t, x) \in \left(\frac{3}{4}, 1\right]. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Es sei bemerkt, dass im Fall $f \in (1, 2]$ die Funktion $(1 - f(q))(1 + f(q))$ in (A.7) negative Werte annimmt. Um die Ungleichungen für δ in (A.7) eindeutig nach s umzuformen, untersucht man die Formel (A.7) separat für $f \in (1, 2]$, d.h. für $q \in Q_5 = \left\{q \in [\underline{q}, \bar{q}] \mid f(q) \in (1, 2]\right\}$.

4. Fall: $q \in Q_5$. In diesem Fall ist es wichtig zu beachten, dass die partielle Ableitung V_q und der Energiepreis beide positiv sind.

Aus der Formel (1.91) folgt dann, dass δ positiv ist (wegen $V_q > 0$ und $s > 0$). Dies bedeutet, dass für $w^*(t, x) = y_+(t, x)$ die Funktion δ im Intervall $\left[0, \frac{3}{4}\right]$ liegt. Der Fall $w^*(t, x) = \bar{u}(q)$ tritt nicht auf, weil für $f \in (1, 2]$ die Funktion δ immer negativ ist. Dabei gilt für $q \in Q_5$ anstatt (A.7)

$$w^*(t, x) = \begin{cases} y_+(t, x), & \delta(t, x) \in \left[0, \frac{3}{4}\right], \\ 0, & \delta(t, x) \in \left(\frac{3}{4}, 1\right]. \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Somit definieren die Formeln (A.5), (A.7)-(A.8) die optimale Strategie $w^*(t, x)$ in Abhängigkeit von der Funktion $\delta(t, x)$.

Die hergeleiteten Formeln (A.5) und (A.7)-(A.8) für δ werden nun nach dem Preis s umgeformt, um die kritischen Preisgrenzen zu bestimmen, die die Bereiche des Pumpens, des Wartens und des Ablassens voneinander trennen. Dabei ist gemäß der Funktion (1.90) die optimale Strategie $w^*(t, x) = \underline{u}(q)$, d.h. das Wasser wird in den Speicher hineingepumpt, wenn für alle $(t, x) \in [0, T) \times \mathcal{X}$ die Bedingung $s < S_P(t, x)$ erfüllt ist, wobei für den kritischen Preis beim Wasserpumpen gilt

$$S_P(t, x) = \frac{h(q)\eta_{\text{pump}}}{c_F(q + q_f^-)} \frac{\partial}{\partial q} V(t, x).$$

Die optimale Strategie lautet:

$$w^*(t, x) = \begin{cases} \underline{u}(q), & s < S_P(t, x), \\ 0, & S_P(t, x) \leq s \leq S_A^a(t, x), \\ y_+(t, x), & S_A^a(t, x) < s \leq S_A^b(t, x), \\ \bar{u}(q), & s > S_A^b(t, x), \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

mit

$$y_+(t, x) = \frac{2P_{\text{theo}}}{3c_0q} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{S_+(t, x)}{s}}\right), \quad s > S_+(t, x),$$

und

$$S_+(t, x) = \frac{3}{4} \frac{\mathfrak{h}(q)}{c_F(q - q_f^+) \eta_{\max}} \frac{\partial}{\partial q} V(t, x),$$

sowie den kritischen Preisgrenzen beim Ablassen

$$\begin{aligned} S_A^a(t, x) &= S_A^b(t, x) = \frac{3S_+(t, x)}{(1+\mathfrak{f}(q))(2-\mathfrak{f}(q))}, & q \in [\underline{q}, q_1^*), \\ S_A^a(t, x) &= \frac{4}{3}S_+(t, x), \quad S_A^b(t, x) = \frac{S_+(t, x)}{(1-\mathfrak{f}(q))(1+\mathfrak{f}(q))}, & q \in [q_1^*, q_2^*), \\ S_A^a(t, x) &= \frac{4}{3}S_+(t, x), \quad S_A^b(t, x) = +\infty, & q \in (q_2^*, \bar{q}], \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

für alle $(t, x) \in [0, T) \times \mathcal{X}$, und für die kritischen Füllstände gilt

$$q_1^* = \begin{cases} \mathfrak{f}^{-1}(\frac{1}{2}) \wedge \bar{q}, & \mathfrak{f}(\bar{q}) \geq \frac{1}{2}, \\ \bar{q}, & \mathfrak{f}(\bar{q}) < \frac{1}{2}, \end{cases} \quad q_2^* = \begin{cases} \mathfrak{f}^{-1}(1) \wedge \bar{q}, & \mathfrak{f}(\bar{q}) \geq 1, \\ \bar{q}, & \mathfrak{f}(\bar{q}) < 1. \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Es sei bemerkt, dass nach der Positivitätsbedingung des Wirkungsgrades der Turbine (1.36) der maximale Füllstand \bar{q} der Bedingung $\bar{q} \leq \mathfrak{f}^{-1}(2)$ genügen muss. Weiterhin muss man den Parameter \underline{q} so setzen, dass $\underline{q} > q_f^+ > 0$ (bzw. $\underline{q} - \varepsilon_q - \tilde{\varepsilon}_q > q_f^+ > 0$ für das regularisierte Problem, das in den Abschnitten 1.3 und 2.2 betrachtet wird) immer erfüllt ist.

Aus der Formel (A.9) für die optimale Strategie zusammen mit den kritischen Preisgrenzen (A.10) folgt, dass wenn das Wasser vom Speicher abgelassen wird, dann stets mit der maximalen Rate $\bar{u}(q)$, falls $q < q_1^*$ gilt. Für $q \in [q_1^*, q_2^*]$ ist neben $w^*(t, x) = \bar{u}(q)$ auch das Regime $w^*(t, x) = y_+(t, x)$ für den Fall „mittlerer“ Preise $S_A^a(t, x) < s \leq S_A^b(t, x)$ möglich, bei dem der Speicher mit der „effektiven“ Rate $w^*(t, x) = y_+(t, x) \leq \bar{u}(q)$ entleert wird. Ansonsten, wenn der Füllstand q hinreichend groß ist und Werte aus dem Intervall $(q_2^*, \bar{q}]$ annimmt, entfällt der Fall $w^*(t, x) = \bar{u}(q)$ und die einzige zulässige Strategie für das Ablassen ist $w^*(t, x) = y_+(t, x)$. Den typischen Verlauf der optimalen Strategie $w^*(t, x)$ und der kritischen Preisgrenzen stellt die Abbildung 1.4 dar.

Außerdem folgt aus der Definition (A.1), dass die Funktion $\mathfrak{f} : [\underline{q}, \bar{q}] \rightarrow [-1, 2]$ eine Inverse $\mathfrak{f}^{-1} : [-1, 2] \rightarrow [\underline{q}, \bar{q}]$ hat. Diese Tatsache erlaubt, durch das Lösen der Gleichungen $\mathfrak{f}(q^*) = \frac{1}{2}$ und $\mathfrak{f}(q^*) = 1$ die kritischen Füllstände q_1^* bzw. q_2^* in (A.11) eindeutig (jedoch numerisch) zu berechnen.

Bemerkung A.0.1. Für alle $(t, x) \in [0, T) \times \mathcal{X}$, für die der Preis s an der kritischen Grenze $S_P(t, x)$ oder $S_A^a(t, x)$ liegt, ist der Maximierer $w^*(t, x)$ der Funktion H nicht eindeutig. Für $s = S_P(t, x)$ oder $s = S_A^a(t, x)$ ist jeder Wert $y \in [\underline{u}(q), 0]$ bzw. $y \in [0, \min\{y_+(t, x), \bar{u}(q)\}]$ ein potentieller Maximierer. Da im betrachteten mathematischen Modell des Pumpspeichers die Prozesse $(S_t)_{t \in [0, T]}$ und $(\Pi_t)_{t \in [0, T]}$ nichtgesteuerte Zufallsprozesse sind und der der ODE (1.21) genügende Prozess $(Q_t^u)_{t \in [0, T]}$ dagegen von der Steuerung $(u_t)_{t \in [0, T]}$ beeinflusst wird, hat die Menge $\{t \in [0, T] \mid S_t = S_P(t, X_t^u) \text{ oder } S_t = S_A^a(t, X_t^u)\}$ das Lebesgue-Maß Null. Somit manifestiert sich jede Auswahl des nichteindeutigen Maximierers u^* in derselben Zielfunktion $J(t, x; u^*)$ und es ist berechtigt, nur einen von denen auszuwählen, hier $w^*(t, x) = 0$.

Bemerkung A.0.2. Die erhaltenen Formeln (A.9)-(A.11) gelten unter der Annahme $V_q(t, x) > 0$ auch für die nichtpositiven Energiepreise $s \leq 0$. Dabei ist das Pumpen mit $w^*(t, x) = \underline{u}(q)$

für $q \in [\underline{q}, \bar{q})$ die einzige zulässige Strategie in diesem Fall. Beim vollen Speicher ($q = \bar{q}$) ist natürlicherweise $w^*(t, x) = 0$.

Dieser Anhang behandelt einige Grundlagen der Theorie der Differenzenverfahren zur numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen. Insbesondere wird die Aufstellung von Differenzenschemata für ausgewählte Randwertprobleme für elliptische Gleichungen zweiter Ordnung mit ein und zwei Ortsvariablen erläutert.

B.1 Grundlagen der Differenzenverfahren

Der Inhalt dieses Anhangs, in dem die grundlegenden Begriffe der Theorie der Differenzenschemata eingeführt werden, stützt sich auf Samarskij [60, Kapitel 2, Abschnitte 2.1.1–2.3.1].

Seien $G = (\underline{x}, \bar{x}) \subset \mathbb{R}$ und $\bar{G} = [\underline{x}, \bar{x}] \subset \mathbb{R}$ mit $\underline{x} < \bar{x}$ ein offenes bzw. abgeschlossenes Intervall mit den Randpunkten $\Gamma = \{\underline{x}, \bar{x}\}$. Weiter sei

$$V : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}, \quad V \in \mathcal{C}^4(\bar{G}),$$

eine auf \bar{G} definierte, viermal stetig differenzierbare Funktion, wobei $\mathcal{C}^4(\bar{G})$ der Raum der auf \bar{G} viermal stetig differenzierbaren Funktionen V mit der Maximum-Norm

$$\|V\|_{\infty} = \sup_{x \in \bar{G}} |V(x)|$$

ist. Sei \mathcal{L} ein auf $\mathcal{C}^4(G)$ definierter linearer Differentialoperator, der auf die Funktion V angewendet wird. Es wird angenommen, dass $V \in \mathcal{C}^4(\bar{G})$ die Lösung der linearen Differentialgleichung

$$\mathcal{L}V = F(x), \quad x \in G, \tag{B.1}$$

mit der rechten Seite $F(x)$, $x \in G$, ist und folgender Randbedingung mit dem linearen Differentialoperator l und der rechten Seite $f(x)$, $x \in \Gamma$, genügt:

$$lV = f(x), \quad x \in \Gamma. \tag{B.2}$$

Die Aufgabe (B.1)-(B.2) nennt man *stetiges Randwertproblem*.

Man setzt voraus, dass die Randwertaufgabe (B.1)-(B.2) eine eindeutige Lösung besitzt, die aber nicht, oder zumindest nur schwer analytisch zu bestimmen ist. Daher wird die gestellte Randwertaufgabe (B.1)-(B.2) numerisch gelöst. Dafür ersetzt man die Menge \overline{G} durch ein *Gitter* $\overline{\mathcal{G}}$ (eine diskrete Menge von Punkten x_j aus \overline{G}), das im Weiteren äquidistant angenommen wird.

Definition B.1.1 (Samarskij [60]). Die Punktmenge

$$\overline{\mathcal{G}} = \{x_j = \underline{x} + j \cdot \Delta, j = 0, 1, \dots, N\} \quad (\text{B.3})$$

ist ein auf dem abgeschlossenen Intervall $\overline{G} = [\underline{x}, \overline{x}]$ eingeführtes *äquidistantes Gitter* $\overline{\mathcal{G}}$ mit den Gitterpunkten $x_j = \underline{x} + j \cdot \Delta, j = 0, 1, \dots, N$, und der Schrittweite $\Delta = \frac{\overline{x} - \underline{x}}{N} > 0$, wobei $N + 1$ die Anzahl der Gitterpunkte ist. Dabei ist $\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \cup \gamma$, wobei

$$\mathcal{G} = \{x_j = \underline{x} + j \cdot \Delta, j = 1, \dots, N - 1\}$$

die Menge der inneren Gitterpunkte und $\gamma = \{\underline{x}, \overline{x}\}$ die Menge der Randpunkte sind.

Die Funktion $V \in \mathcal{C}^4(\overline{G})$ mit $x \in \overline{G}$ wird durch ihre *Gitterfunktion*

$$V_\Delta(x_j) := V_j \in \mathcal{C}_\Delta$$

mit $x_j \in \overline{\mathcal{G}}$ ersetzt, wobei \mathcal{C}_Δ der lineare Raum der auf $\overline{\mathcal{G}}$ definierten Gitterfunktionen V_Δ mit der diskreten Maximum-Norm

$$\|V_\Delta\|_\infty = \max_{x_j \in \overline{\mathcal{G}}} |V_\Delta(x_j)| = \max_{0 \leq j \leq N} |V_j|$$

ist.

Definition B.1.2 (Samarskij [60]). Sei V eine mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktion in einer Umgebung $U_{\Delta_0}(x) = (x - \Delta_0, x + \Delta_0)$, $\Delta < \Delta_0$, von x für ein fixiertes Δ_0 . Es gelten folgende Differenzenapproximationen für den Differentialoperator \mathcal{L} im Punkt x :

1. für den Differentialoperator $\mathcal{L}V = V' = \frac{dV}{dx}$ werden eingeführt:

Vorwärtsdifferenzenquotient

$$\Lambda^+ V(x) = \frac{V(x + \Delta) - V(x)}{\Delta} = V_x,$$

Rückwärtsdifferenzenquotient

$$\Lambda^- V(x) = \frac{V(x) - V(x - \Delta)}{\Delta} = V_{\overline{x}},$$

zentraler Differenzenquotient

$$\Lambda^{\frac{1}{2}} V(x) = \frac{V(x + \Delta) - V(x - \Delta)}{2\Delta} = \frac{1}{2}(V_x + V_{\overline{x}}) = V_{\dot{x}},$$

2. für den Differentialoperator $\mathcal{L}V = V'' = \frac{d^2V}{dx^2}$ wird eingeführt:

Differenzenquotient zweiter Ordnung

$$\Lambda V(x) = \frac{\Lambda^+(x) - \Lambda^-(x)}{\Delta} = \frac{V(x + \Delta) - 2V(x) + V(x - \Delta)}{\Delta^2} = \frac{V_x - V_{\bar{x}}}{\Delta} = V_{\bar{x}x}.$$

Theorem B.1.3. Für die in Definition B.1.2 eingeführten Approximationen des Differentialoperators \mathcal{L} im Punkt x gilt:

$$V_x(x) - V'(x) = \mathcal{O}(\Delta), \quad \text{für } V \in \mathcal{C}^2(U_{\Delta_0}(x)),$$

$$V_{\bar{x}}(x) - V'(x) = \mathcal{O}(\Delta), \quad \text{für } V \in \mathcal{C}^2(U_{\Delta_0}(x)),$$

$$V_{\dot{x}}(x) - V'(x) = \mathcal{O}(\Delta^2), \quad \text{für } V \in \mathcal{C}^3(U_{\Delta_0}(x)),$$

$$V_{\bar{x}x}(x) - V''(x) = \mathcal{O}(\Delta^2), \quad \text{für } V \in \mathcal{C}^4(U_{\Delta_0}(x)).$$

Beweis. Beweis siehe in Samarskij [60]. □

Zur Umformung der meisten Differenzenausdrücke werden auch folgende Formeln zur Bildung der Differenzenquotienten von Produkten herangezogen (siehe Samarskij [60, Abschnitt 2.3.1]).

Definition B.1.4. Seien $V_{\Delta}(x_j), W_{\Delta}(x_j) \in \mathcal{C}_{\Delta}$ zwei auf dem äquidistanten Gitter $\bar{\mathcal{G}}$ definierte Gitterfunktionen V_j und W_j . So gelten folgende Formeln für die Differenzenquotienten des Produktes aus den Funktionen V_j und W_j :

$$\begin{aligned} (VW)_{x,j} &= V_{x,j}W_j + V^{(+1_j)}W_{x,j} = V_{x,j}W^{(+1_j)} + V_jW_{x,j}, \\ (VW)_{\bar{x},j} &= V_{\bar{x},j}W_j + V^{(-1_j)}W_{\bar{x},j} = V_{\bar{x},j}W^{(-1_j)} + V_jW_{\bar{x},j}, \end{aligned} \tag{B.4}$$

mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} y_{x,j} &= \frac{y(x_j + \Delta) - y(x_j)}{\Delta} = \frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta}, & y_{\bar{x},j} &= \frac{y(x_j) - y(x_j - \Delta)}{\Delta} = \frac{y_j - y_{j-1}}{\Delta}, \\ y^{(+1_j)} &= y(x_j + \Delta) = y_{j+1}, & y^{(-1_j)} &= y(x_j - \Delta) = y_{j-1}, \end{aligned}$$

für eine generische Gitterfunktion $y_j \in \mathcal{C}_{\Delta}$.

Bemerkung B.1.5. Sei $V, W \in \mathcal{C}^2(U_{\Delta_0}(x))$, $\Delta < \Delta_0$. Für die in Definition B.1.4 eingeführten Approximationen der Produktregel (B.4) gilt

$$(VW)_x(x) - (VW)'(x) = \mathcal{O}(\Delta), \quad (VW)_{\bar{x}}(x) - (VW)'(x) = \mathcal{O}(\Delta).$$

Die linearen Differentialoperatoren \mathcal{L} und l in (B.1)-(B.2) werden durch ihre Analoga, die linearen Differenzenoperatoren Λ bzw. l_{Δ} ersetzt. Unter der Voraussetzung über die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung V des stetigen Randwertproblems (B.1)-(B.2) ordnet man ihm folgende Differenzenrandwertaufgabe auf dem äquidistanten Gitter $\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \cup \gamma$ zu:

$$\Lambda V_{\Delta} = \phi, \quad x \in \mathcal{G}, \tag{B.5}$$

und

$$l_{\Delta} V_{\Delta} = f_{\Delta}, \quad x \in \gamma, \quad (\text{B.6})$$

wobei die Gitterfunktionen ϕ und f_{Δ} für die rechten Seiten F der Differentialgleichung (B.1) bzw. f der Randbedingung (B.2) auf \mathcal{G} bzw. γ definiert sind. Dabei ist die Gitterfunktion $V_{\Delta} \in \mathcal{C}_{\Delta}$ die Lösung des Differenzenrandwertproblems (B.5)-(B.6).

Definition B.1.6 (Samarskij [60]). Sei V eine hinreichend glatte Funktion in einer Umgebung $U_{\Delta_0}(x)$, $\Delta < \Delta_0$, von x für ein fixiertes Δ_0 . Man sagt, dass der Differenzenoperator Λ den Differentialoperator \mathcal{L} lokal im Punkt x mit der Ordnung $p > 0$ approximiert, wenn

$$\psi(x) = \Lambda V(x) - \mathcal{L}V(x) = \mathcal{O}(\Delta^p)$$

gilt. Dabei ist $\psi(x)$ der lokale Fehler der Differenzenapproximation des Operators $\mathcal{L}V$ im Punkt x .

Man betrachtet weiter einen Differenzenoperator Λ , der die Gitterfunktion $V_{\Delta} \in \mathcal{C}_{\Delta}$ auf die auf $\overline{\mathcal{G}}$ definierte Gitterfunktion ΛV_{Δ} abbildet.

Definition B.1.7 (Samarskij [60]). Die Gitterfunktion

$$\psi_{\Delta} = \Lambda V_{\Delta} - (\mathcal{L}V)_{\Delta}$$

heißt der lokale Approximationsfehler des Differentialoperators \mathcal{L} durch den Differenzenoperator Λ .

Man sagt, dass Λ den Differentialoperator \mathcal{L} auf dem Gitter \mathcal{G} mit der Ordnung $p > 0$ approximiert bzw. Λ ist mit \mathcal{L} konsistent mit der Ordnung $p > 0$, wenn

$$\|\psi_{\Delta}\|_{\Delta} = \|\Lambda V_{\Delta} - (\mathcal{L}V)_{\Delta}\|_{\Delta} = \mathcal{O}(\Delta^p)$$

gilt, d.h. es gilt $\|\psi_{\Delta}\|_{\Delta} \leq C\Delta^p$ für eine positive, von Δ unabhängige Konstante $C > 0$, und eine Norm $\|\cdot\|_{\Delta}$ auf \mathcal{C}_{Δ} .

Analog definiert $\nu_{\Delta} = l_{\Delta} V_{\Delta} - (lV)_{\Delta}$ den lokalen Approximationsfehler des Differentialoperators l durch den Differenzenoperator l_{Δ} auf γ , sodass

$$\|\nu_{\Delta}\|_{\Delta} = \|l_{\Delta} V_{\Delta} - (lV)_{\Delta}\|_{\Delta} = \mathcal{O}(\Delta^{p'})$$

gilt. Dabei kann die Approximationsordnung p' auf γ im Allgemeinen von der Approximationsordnung p auf \mathcal{G} verschieden sein.

Bemerkung B.1.8. Sinngemäß gelten die obigen Definitionen und Begriffe auch für den mehrdimensionalen Fall. So sei z.B. $V_{\Delta}(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{C}_{\Delta}$ eine Gitterfunktion von n Variablen mit einem n -dimensionalen Vektor $\Delta = (\Delta_1, \dots, \Delta_n)$ von Schrittweiten Δ_i , $i = 1, \dots, n$. Wenn die Approximation bezüglich Δ_i , $i = 1, \dots, n$, von verschiedener Ordnung ist, dann gilt

$$\|\psi_{\Delta}\|_{\Delta} = \|\Lambda V_{\Delta} - (\mathcal{L}V)_{\Delta}\|_{\Delta} \leq C \sum_{i=1}^n \Delta_i^{p_i}, \quad p_i > 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

wobei $C > 0$ eine von $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ unabhängige Konstante und $p_1, \dots, p_n > 0$ positive Exponenten sind (siehe Samarskij [60, Abschnitt 2.1.3]).

Mit anderen Worten, wenn $\|\psi_\Delta\|_\Delta \rightarrow 0$ und $\|\nu_\Delta\|_\Delta \rightarrow 0$ für $\Delta \rightarrow 0$ gelten, dann approximiert der Differenzenoperator Λ den Differentialoperator \mathcal{L} bzw. der Differenzenoperator l_Δ den Differentialoperator l . Wenn diese Approximationen für alle hinreichend glatten Funktionen φ , im Allgemeinen für $\varphi \in C^4(\overline{G})$, gelten, so heißt das Differenzenrandwertproblem (B.5)-(B.6) mit dem stetigen Randwertproblem (B.1)-(B.2) *konsistent* (siehe Duffy [21, Kapitel 8, Abschnitt 8.2.1]).

Für die Lösung V des stetigen Randwertproblems (B.1)-(B.2) wird die auf \mathcal{C}_Δ definierte und V zugeordnete Gitterfunktion $(V)_\Delta$ (die Projektion von V auf das Gitter $\overline{\mathcal{G}}$) zur Bestimmung des Fehlers des Differenzenschemas (B.5)-(B.6) betrachtet (siehe Samarskij [60, Abschnitt 2.1.5]):

$$\xi_\Delta = V_\Delta - (V)_\Delta. \quad (\text{B.7})$$

Zusammen mit dem Fehler (B.7) lässt sich das Differenzenrandwertproblem (B.5)-(B.6) weiter umschreiben:

$$\begin{aligned} \Lambda \xi_\Delta &= \phi - \Lambda(V)_\Delta, & x \in \mathcal{G}, \\ l_\Delta \xi_\Delta &= f_\Delta - l_\Delta(V)_\Delta, & x \in \gamma, \end{aligned}$$

wobei $\phi - \Lambda(V)_\Delta$ und $f_\Delta - l_\Delta(V)_\Delta$ die Defekte von $(V)_\Delta$ in der Differenzengleichung (B.5) bzw. in der Randbedingung (B.6) sind. Mit anderen Worten ist $\phi - \Lambda(V)_\Delta$ bzw. $f_\Delta - l_\Delta(V)_\Delta$ der Approximationsfehler von (B.5) auf der Lösung V von (B.1) bzw. von (B.6) auf der Lösung V von (B.2).

Definition B.1.9 (Samarskij [60]). Die Lösung der diskretisierten Randwertaufgabe (B.5)-(B.6) konvergiert gegen die Lösung von (B.1)-(B.2), wenn für $\xi_\Delta = V_\Delta - (V)_\Delta$ gilt

$$\|\xi_\Delta\|_\Delta \rightarrow 0 \quad (\text{B.8})$$

für $\Delta \rightarrow 0$, wobei $\|\cdot\|_\Delta$ eine Norm auf \mathcal{C}_Δ ist. Somit ist das Differenzenschema (B.5)-(B.6) für das stetige Randwertproblem (B.1)-(B.2) *konvergent*.

Definition B.1.10 (Samarskij [60]). Ein Differenzenschema (B.5)-(B.6) konvergiert mit der Geschwindigkeit $\mathcal{O}(\Delta^p)$ bzw. hat die Genauigkeitsordnung bzw. Konvergenzordnung p , wenn für hinreichend kleine Δ , $\Delta \leq \Delta_0$, folgende Ungleichung (B.8) mit $C > 0$ (unabhängig von Δ) erfüllt ist:

$$\|\xi_\Delta\|_\Delta = \|V_\Delta - (V)_\Delta\|_\Delta \leq C \Delta^p. \quad (\text{B.9})$$

Definition B.1.11 (Samarskij [60]). Ein Differenzenschema (B.5)-(B.6) ist *korrekt*, wenn für alle hinreichend kleinen Δ , $\Delta \leq \Delta_0$, folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. die Lösung V_Δ der Differenzenaufgabe (B.5)-(B.6) existiert und ist eindeutig bestimmt für alle rechten Seiten F bzw. f und Randwerte, die durch die Randbedingungen (B.2) definiert werden;
2. die Lösung V_Δ hängt stetig von der rechten Seite ϕ und f_Δ ab und diese Abhängigkeit ist gleichmäßig in Δ . Das heißt, es existiert eine positive, von Δ unabhängige Konstante C , sodass für $\Delta \leq \Delta_0$ die Ungleichung

$$\|\tilde{V}_\Delta - V_\Delta\|_{\Delta_1} \leq C \left(\|\tilde{\phi} - \phi\|_{\Delta_2} + \|\tilde{f}_\Delta - f_\Delta\|_{\Delta_3} \right) \quad (\text{B.10})$$

erfüllt ist, wobei \tilde{V}_Δ die Lösung der Differenzenaufgabe (B.5)-(B.6) mit der rechten Seite $\tilde{\phi}$ und \tilde{f}_Δ ist und $\|\cdot\|_{\Delta_1}$, $\|\cdot\|_{\Delta_2}$, sowie $\|\cdot\|_{\Delta_3}$ die verschiedenen Normen auf \mathcal{C}_Δ sind.

Wenn die Ungleichung (B.10) erfüllt ist, dann nennt man das Differenzenschema (B.5)-(B.6) *stabil*. Die Ungleichung (B.10) heißt dabei *Stabilitätsbedingung* des Differenzenschemas (B.5)-(B.6).

In Hinblick auf die Linearität der Differenzenoperatoren Λ und l_Δ , sowie zusammen mit den Approximationsfehlern $\phi - \Lambda(V)_\Delta$, $x \in \mathcal{G}$, und $f_\Delta - l_\Delta(V)_\Delta$, $x \in \gamma$, und unter der Voraussetzung, dass das Differenzenschema (B.5)-(B.6) korrekt im Sinne von Definition B.1.11 ist, lässt sich der Fehler (B.7) des Differenzenschemas folgendermaßen abschätzen:

$$\|\xi_\Delta\|_{\Delta_1} \leq C \left(\|\phi - \Lambda(V)_\Delta\|_{\Delta_2} + \|f_\Delta - l_\Delta(V)_\Delta\|_{\Delta_3} \right),$$

wobei $C > 0$ eine positive, von Δ unabhängige Konstante ist und der Fehler des Differenzenschemas ξ_Δ sowie die Approximationsfehler $\phi - \Lambda(V)_\Delta$, $x \in \mathcal{G}$, bzw. $f_\Delta - l_\Delta(V)_\Delta$, $x \in \gamma$, in verschiedenen, auf \mathcal{C}_Δ definierten Normen $\|\cdot\|_{\Delta_1}$, $\|\cdot\|_{\Delta_2}$, sowie $\|\cdot\|_{\Delta_3}$, geschätzt werden. Im Folgenden wird für die Normen $\|\cdot\|_\Delta$ die diskrete Maximum-Norm $\|\cdot\|_\infty$ verwendet.

Seien nun F_Δ und $(\mathcal{L}V)_\Delta$ die Projektionen der rechten Seite $F(x)$ und des Differentialoperators $\mathcal{L}V(x)$ auf \mathcal{G} . Außerdem gilt nach (B.1) die Gleichung $(F - \mathcal{L}V)_\Delta = 0$.

Definition B.1.12 (Samarskij [60]). *Der Approximationsfehler ψ_Δ der Differenzengleichung (B.5) setzt sich aus dem Approximationsfehler der rechten Seite $\psi_\Delta^{(1)} = \phi - F_\Delta$ und dem Approximationsfehler des Differentialoperators $\psi_\Delta^{(2)} = (\mathcal{L}V)_\Delta - \Lambda(V)_\Delta$ zusammen:*

$$\psi_\Delta = \psi_\Delta^{(1)} + \psi_\Delta^{(2)}, \quad x \in \mathcal{G}.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} \psi_\Delta &= \Lambda V_\Delta - \Lambda(V)_\Delta = (\phi - \Lambda(V)_\Delta) - (F_\Delta - (\mathcal{L}V)_\Delta) \\ &= (\phi - F_\Delta) + ((\mathcal{L}V)_\Delta - \Lambda(V)_\Delta) = \psi_\Delta^{(1)} + \psi_\Delta^{(2)}, \quad x \in \mathcal{G}. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Analog nach der Definition B.1.12 wird der Approximationsfehler ν_Δ am Rand (B.6) definiert:

$$\nu_\Delta = \nu_\Delta^{(1)} + \nu_\Delta^{(2)}, \quad x \in \gamma, \quad (\text{B.12})$$

mit dem Approximationsfehler $\nu_\Delta^{(1)} = f_\Delta - (f)_\Delta$ und $\nu_\Delta^{(2)} = (lV)_\Delta - l_\Delta(V)_\Delta$ der rechten Seite bzw. des Differentialoperators, wobei $(f)_\Delta$ und $(lV)_\Delta$ die Projektionen der rechten Seite $f(x)$ bzw. des Differentialoperators $lV(x)$ auf γ sind.

Definition B.1.13 (Samarskij [60]). Das Differenzenschema (B.5)-(B.6) hat die Approximationsordnung p , wenn

$$\|\psi_\Delta\|_{\Delta_2} = \mathcal{O}(\Delta^p), \quad \|\nu_\Delta\|_{\Delta_3} = \mathcal{O}(\Delta^p), \quad (\text{B.13})$$

gilt.

Wenn das Differenzenschema (B.5)-(B.6) nach der Bedingung (B.10) stabil ist und das stetige Randwertproblem (B.1)-(B.2) mit der Approximationsordnung p approximiert, dann ist das Differenzenschema (B.5)-(B.6) im Sinne der Bedingung (B.8) konvergent und seine Konvergenzordnung stimmt mit der Approximationsordnung p überein und es gilt (B.13) (siehe Samarskij [60]). Um zu zeigen, dass ein Differenzenschema im Sinne der Definition B.1.9 konvergent ist, muss man somit seine Stabilität in Hinblick auf die Bedingung (B.10) zusammen mit dem Approximationsfehler (d.h. seine Konsistenz mit dem stetigen Randwertproblem nach der Definition B.1.7) untersuchen.

Das entwickelte Differenzenschema (B.5)-(B.6) führt auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems

$$\mathcal{A}\mathcal{V} = \mathcal{F}.$$

Dabei sind \mathcal{A} eine quadratische $((N+1) \times (N+1))$ -Matrix,

$$\mathcal{F} = (f_{\Delta}(x_0), \phi(x_1), \dots, \phi(x_{N-1}), f_{\Delta}(x_N))^{\top}$$

ein $(N+1)$ -dimensionaler Spaltenvektor der rechten Seite und $\mathcal{V} = (V_0, \dots, V_N)^{\top}$ ein Lösungsvektor für die Gitterfunktion. Von Interesse ist folgende Eigenschaft der Matrix \mathcal{A} :

Definition B.1.14. Sei $\mathcal{A} = (\alpha_{ij})$ eine quadratische $((N+1) \times (N+1))$ -Matrix. \mathcal{A} heißt *streng diagonaldominant*, wenn

$$|\alpha_{ii}| > \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N |\alpha_{ij}|, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (\text{B.14})$$

gilt (vgl. Horn u. Johnson [37, Definition 6.1.9]).

Theorem B.1.15 (Horn u. Johnson [37]). Sei $\mathcal{A} = (\alpha_{ij})$ eine quadratische, streng diagonaldominante $((N+1) \times (N+1))$ -Matrix. Dann ist \mathcal{A} invertierbar.

Beweis. Beweis siehe Theorem 6.1.0 in Horn u. Johnson [37]. □

Definition B.1.16 (M-Matrix). Eine streng diagonaldominante $((N+1) \times (N+1))$ -Matrix $\mathcal{A} = (\alpha_{ij})$ mit Elementen $\alpha_{ii} > 0$ und $\alpha_{ij} \leq 0, i \neq j$, heißt *M-Matrix*.

Die Definition B.1.16 der M-Matrix lässt sich auch schwächer formulieren, wenn man in (B.14) auch die Gleichheit zulässt und nur fordert, dass die Ungleichung (B.14) mindestens für ein i streng erfüllt ist.

Bemerkung B.1.17. Sei $\mathcal{A} = (\alpha_{ij})$ eine M-Matrix. Dann existiert ihre Inverse und dabei gilt: $\mathcal{A}^{-1} \geq 0$ und $\text{diag}(\mathcal{A}^{-1}) > 0$, wobei die Ungleichungen elementenweise zu verstehen sind (siehe Varga [72]).

Aus Bedingung (B.14) und Theorem B.1.15 folgen unmittelbar die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung V_{Δ} des Differenzenschemas (B.5)-(B.6), sodass eine Inverse \mathcal{A}^{-1} existiert, und $\mathcal{V} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{F}$ gilt. Dabei muss

$$\|\mathcal{A}^{-1}\| \leq C \quad (\text{B.15})$$

für eine positive, von Δ unabhängige Konstante C erfüllt sein.

Unter Beachtung von (B.10) und (B.15) erhält man aus $\mathcal{V} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{F}$ schließlich folgende Bedingung:

$$\|\mathcal{V}\|_{\Delta_1} \leq \|\mathcal{A}^{-1}\|_{\Delta} \|\mathcal{F}\|_{\Delta_2} \leq C \|\mathcal{F}\|_{\Delta_2} \quad (\text{B.16})$$

für die Vektornormen $\|\cdot\|_{\Delta_1}$ und $\|\cdot\|_{\Delta_2}$, sowie die Matrixnorm $\|\cdot\|_{\Delta}$.

Seien nun $\|\cdot\|_{\Delta_1}$ und $\|\cdot\|_{\Delta_2}$ die diskreten Maximum-Normen, sodass

$$\|\mathcal{V}\|_{\infty} = \max_{0 \leq i \leq N} |V_{\Delta}(x_i)| \quad \text{und} \quad \|\mathcal{F}\|_{\infty} = \max_{0 \leq i \leq N} |\phi(x_i)|$$

gilt. Dann wird die diskrete Maximum-Norm für die Matrix $\mathcal{A} = (a_{ij})$ wie folgt definiert (siehe Gantmacher [32, Abschnitt 14.2]):

$$\|\mathcal{A}\|_{\infty} = \max_{0 \leq i \leq N} \sum_{j=0}^N |a_{ij}|.$$

Theorem B.1.18 (Ahlberg u. Nilson [1]). *Für die M-Matrix $\mathcal{A} = (a_{ij})$ vom Format $(N+1) \times (N+1)$ gilt die Abschätzung*

$$\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{R(\mathcal{A})} \quad (\text{B.17})$$

mit

$$R(\mathcal{A}) = \min_{0 \leq i \leq N} \left(|a_{ii}| - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N |a_{ij}| \right).$$

Beweis. Beweis siehe in Ahlberg u. Nilson [1]. □

Mit Theorem B.1.18 und (B.17) lässt sich die Stabilitätsbedingung (B.16) mittels der diskreten Maximum-Norm wie folgt darstellen:

$$\|\mathcal{V}\|_{\infty} \leq \frac{1}{R(\mathcal{A})} \|\mathcal{F}\|_{\infty} = \left[\min_{0 \leq i \leq N} \left(|a_{ii}| - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N |a_{ij}| \right) \right]^{-1} \|\mathcal{F}\|_{\infty}. \quad (\text{B.18})$$

Aus (B.18) folgt unmittelbar, dass für die Feststellung der Stabilität der Differenzenrandwertaufgabe (B.5)-(B.6) nur die Eigenschaft (B.14) für \mathcal{A} erforderlich ist.

B.2 Eindimensionale Differentialgleichung zweiter Ordnung

In diesem Anhang wird ein Differenzenschema für eine eindimensionale Differentialgleichung zweiter Ordnung entwickelt.

Sei $V : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf dem abgeschlossenen Intervall $\overline{G} = [\underline{x}, \overline{x}] \subset \mathbb{R}$ definierte stetige Funktion $V \in \mathcal{C}^4(\overline{G})$ einer Variablen $x \in \overline{G}$, die die Lösung des Randwertproblems (B.1)-(B.2) ist und dessen Differentialoperator in (B.1) folgende spezielle Gestalt hat:

$$(\mathcal{L} - c)V = (b(x)V')' + a(x)V' - c(x)V, \quad x \in G. \quad (\text{B.19})$$

Annahme B.2.1. Seien die Funktionen a, b, c und F hinreichend glatt, d.h. $a, c, F \in \mathcal{C}^2(\overline{G})$ und $b \in \mathcal{C}^3(\overline{G})$. Außerdem gelte $b(x) \geq C_b > 0$ und $c(x) > 0$, $x \in \overline{G}$, sowie $b'(\underline{x}) + a(\underline{x}) \geq 0$ und $b'(\overline{x}) + a(\overline{x}) \leq 0$. Es wird weiter vorausgesetzt, dass

$$V''(\underline{x}) = V''(\overline{x}) = 0, \quad \underline{x}, \overline{x} \in \Gamma, \quad (\text{B.20})$$

eine Randbedingung für die Differentialgleichung (B.1) mit dem Differentialoperator (B.19) ist.

Dabei wird in der Annahme B.2.1 unter $F \in \mathcal{C}^2(\overline{G})$ verstanden, dass die rechte Seite $F(x)$, $x \in G$, bzw. $f(x)$, $x \in \Gamma$, der Randwertaufgabe (B.1)-(B.2) eine Funktion aus $\mathcal{C}^2(\overline{G})$ ist.

Bemerkung B.2.2. Es kann auch zugelassen werden, dass die obigen Glattheitsforderungen an a, b und F in der Annahme B.2.1 nur stückweise gelten.

Es sei bemerkt, dass die Lösung V von $(\mathcal{L} - c)V = F(x)$ mit dem Differentialoperator (B.19) unter der Annahme B.2.1 existiert und eindeutig ist (siehe Samarskii u. Nikolaev [59]), da die Elliptizitätsbedingung erfüllt ist. Zusammen mit der Annahme B.2.1 über das Verschwinden der zweiten Ableitung am Rand gilt für die Randbedingung (B.20) auf $\Gamma = \{\underline{x}, \overline{x}\}$ eine äquivalente Formulierung:

$$\begin{aligned} r(\underline{x})V' - c(\underline{x})V &= f(\underline{x}) \quad \text{mit} \quad r(\underline{x}) = b'(\underline{x}) + a(\underline{x}) \geq 0, \\ r(\overline{x})V' - c(\overline{x})V &= f(\overline{x}) \quad \text{mit} \quad r(\overline{x}) = b'(\overline{x}) + a(\overline{x}) \leq 0. \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Die Beziehungen (B.21) ergeben sich nach dem direkten Einsetzen der Randbedingungen (B.20) in den wie folgt umgeschriebenen Differentialoperator (B.19):

$$(\mathcal{L} - c)V = (b(x)V')' + a(x)V' - c(x)V = b(x)V'' + (a(x) + b'(x))V' - c(x)V.$$

Im Weiteren wird die Formulierung (B.21) für die Randbedingungen anstelle von (B.20) verwendet.

Bemerkung B.2.3. Wenn die Koeffizienten $r(\underline{x})$ und $r(\overline{x})$ in (B.21) gleich Null sind, dann erhält man in Hinblick auf $c > 0$ die *Dirichlet-Randbedingungen*

$$V(x) = -\frac{f(x)}{c(x)}, \quad x \in \Gamma.$$

Sei $\overline{\mathcal{G}}$ ein auf dem abgeschlossenen Intervall $\overline{G} = [\underline{x}, \overline{x}]$ eingeführtes äquidistantes Gitter wie in (B.3). Sei auch $V_\Delta(x_j) := V_j \in \mathcal{C}_\Delta$ eine auf dem äquidistanten Gitter $\overline{\mathcal{G}}$ definierte Gitterfunktion mit $x_j \in \overline{\mathcal{G}}$.

Um ein Differenzenschema mit quadratischer Approximationsordnung zu erhalten, ersetzt man die Differentialgleichung $(\mathcal{L} - c)V = F(x)$, $x \in G$, mit dem Differentialoperator (B.19) durch ihr diskretisiertes Analogon $(\tilde{\Lambda} - \hat{c})V_\Delta = \phi$, $x \in \mathcal{G}$, mit *gestörten Koeffizienten* (siehe Samarskii [57, Kapitel 3, Abschnitt 5.3]):

$$(\mathcal{L} - c)V \sim (\tilde{\Lambda} - \hat{c})V_\Delta = \chi_\Delta(\hat{b}V_{\overline{x}})_x + \hat{a}^+\hat{b}^{(+1)}V_x + \hat{a}^-\hat{b}V_{\overline{x}} - \hat{c}V_\Delta, \quad x \in \mathcal{G}, \quad (\text{B.22})$$

wobei $\chi_\Delta(x) = \frac{1}{1+\Re_\Delta(x)} \in (0, 1]$, $x \in \mathcal{G}$, mit der „Zellen-Reynoldszahl“ $\Re_\Delta(x) = \frac{1}{2} \frac{\Delta|a(x)|}{b(x)} \geq 0$, $x \in \mathcal{G}$, ist. Dabei ist V_x bzw. $V_{\bar{x}}$ der nach der Definition B.1.2 zu bestimmende Vorwärts- bzw. Rückwärtsdifferenzenquotient für die Gitterfunktion V_Δ . Außerdem werden die Funktionen χ und F durch ihnen zugehörige Gitterfunktionen χ_Δ und ϕ ersetzt. Darüber hinaus verwendet man anstatt der ursprünglichen Koeffizienten b , a bzw. c des Differentialoperators (B.19) die im Differenzenoperator (B.22) enthaltenen Koeffizienten \hat{b} , \hat{a} und \hat{c} (siehe Samarskij [60, Abschnitte 3.1.2-3.2.2]). Diese neuen Koeffizienten sind z.B. nach folgenden Formeln zu bestimmen (siehe Samarskij [60, Abschnitt 3.2.3]):

$$\begin{aligned} \hat{b}(x) &= b(x - \tfrac{\Delta}{2}), & \hat{b}(x + \Delta) &= \hat{b}^{(+1)} = b(x + \tfrac{\Delta}{2}), & \hat{a}^\pm(x) &= \frac{a^\pm(x)}{b(x)} \\ \hat{c}(x) &= c(x), & \phi(x) &= F(x), & x &\in \mathcal{G}, \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

mit $a^\pm(x) = \frac{1}{2}(a(x) \pm |a(x)|)$, $\hat{b}(x) \geq C_b > 0$ und $\hat{c}(x) > 0$.

Dabei sagt man, dass die Koeffizienten $\hat{a}^\pm(x)$, $\hat{c}(x)$ und $\phi(x)$ in (B.23) Funktionale der Funktionswerte von $\frac{a^\pm(x)}{b(x)}$, $c(x)$ bzw. $F(x)$ am Intervall $[x - \frac{\Delta}{2}, x + \frac{\Delta}{2}]$ sind. $\hat{b}(x)$ und $\hat{b}(x + \Delta)$ sind Funktionale der Funktionswerte von $b(x - \frac{\Delta}{2})$ bzw. $b(x + \frac{\Delta}{2})$ am Intervall $[x - \Delta, x]$ bzw. $[x, x + \Delta]$.

Dank den Bedingungen (B.23) besitzt der Differenzenoperator (B.22) auf \mathcal{G} nach (B.11) die quadratische Approximationsordnung und somit gilt $\psi_\Delta = \mathcal{O}(\Delta^2)$ (siehe Samarskij [57, Kapitel 3, Abschnitt 5.3]). Es lässt sich auch bemerken, dass die übliche Diskretisierung des Differentialoperators (B.19), bei der die zweite Ableitung mit dem Differenzenquotienten zweiter Ordnung und die erste Ableitung mit dem Vorwärts- bzw. Rückwärtsdifferenzenquotienten approximiert werden, nur lineare Approximationsordnung liefert.

Nun muss man jedoch noch zeigen, dass die Randbedingungen (B.21) auch die quadratische Approximationsordnung liefern (für die Dirichlet-Randbedingungen ist dies der Fall, siehe Samarskij [60]). Dafür untersucht man das Verhalten der Gitterfunktion V_Δ in den Randpunkten $x_0 = \underline{x}$ und $x_N = \bar{x}$ von $\gamma = \{x_0, x_N\}$. Dabei wird gemäß (B.21) und (B.23) angenommen, dass

$$\begin{aligned} \hat{r}(\underline{x}) &= r(\underline{x}) \geq 0, & \hat{r}(\bar{x}) &= r(\bar{x}) \leq 0, & \hat{c}(\underline{x}) &= c(\underline{x}), & \hat{c}(\bar{x}) &= c(\bar{x}), \\ f_\Delta(\underline{x}) &= f(\underline{x}), & f_\Delta(\bar{x}) &= f(\bar{x}), \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

und die erste partielle Ableitung in (B.21) wird nach der Definition B.1.2 durch den Vorwärts- bzw. Rückwärtsdifferenzenquotienten im Falle $r(\underline{x}) \geq 0$ bzw. $r(\bar{x}) \leq 0$ ersetzt. Dann kommt man mit Hilfe der Approximation des Differentialoperators (B.2) durch sein diskretisiertes Analogon (B.6) zu den folgenden Differenzenschemata für die Randbedingungen (B.21):

$$\hat{r}_0 V_{x,0} - \hat{c}_0 V_0 = f_{\Delta_0}, \quad \hat{r}_N V_{\bar{x},N} - \hat{c}_N V_N = f_{\Delta_N}, \quad x_0, x_N \in \gamma. \quad (\text{B.25})$$

Die erhaltene Differenzenapproximation (B.25) schreibt man weiter im Gitterpunkt x_0 bzw. x_N um:

$$\hat{r}_0 \frac{V_1 - V_0}{\Delta} - \hat{c}_0 V_0 = f_{\Delta_0}, \quad \hat{r}_N \frac{V_N - V_{N-1}}{\Delta} - \hat{c}_N V_N = f_{\Delta_N}. \quad (\text{B.26})$$

Nach (B.12) wird der Approximationsfehler am Rand γ berechnet:

$$\nu_\Delta = \left(f_\Delta - (f)_\Delta \right) + \left(((l - c)V)_\Delta - (l_\Delta - \hat{c})(V)_\Delta \right).$$

Nach (B.24) gilt $f_\Delta - (f)_\Delta = \mathcal{O}(\Delta^2)$ und man erhält:

$$\nu_\Delta = \left(((l - c)V)_\Delta - (l_\Delta - \hat{c})(V)_\Delta \right) + \mathcal{O}(\Delta^2). \quad (\text{B.27})$$

Somit muss man lediglich zeigen, dass der Approximationsfehler des Differentialoperators auch gleich $\mathcal{O}(\Delta^2)$ ist. Dafür kann die Taylorentwicklung für die Funktionen $V(\underline{x} + \Delta)$ und $V(\bar{x} - \Delta)$ zur Entwicklungsstelle \underline{x} bzw. \bar{x} herangezogen werden, dass die Funktion V für $x = \underline{x}$ bzw. $x = \bar{x}$ in einer Umgebung $U_{\Delta_0}(\underline{x}) = (\underline{x}, \underline{x} + \Delta_0)$ bzw. $U_{\Delta_0}(\bar{x}) = (\bar{x} - \Delta_0, \bar{x})$, $\Delta < \Delta_0$, für ein fixiertes Δ_0 hinreichend glatt ist, d.h. $V \in \mathcal{C}^3(\overline{G})$.

Für die Funktion $V(\underline{x} + \Delta)$ ergibt sich dann:

$$V(\underline{x} + \Delta) = V(\underline{x}) + V'(\underline{x})\Delta + \frac{1}{2}V''(\underline{x})\Delta^2 + \mathcal{O}(\Delta^3).$$

Mit der Darstellung (B.21) für den Differentialoperator am Rand und den Funktionen \hat{c} und \hat{r} aus (B.24) wird der Ausdruck (B.27) für den Approximationsfehler an der Stelle \underline{x} weiter umgeformt:

$$\begin{aligned} \nu_\Delta(\underline{x}) &= \left(((l - c)V(\underline{x}))_\Delta - (l_\Delta - \hat{c})V_\Delta(\underline{x}) \right) + \mathcal{O}(\Delta^2) \\ &= \left(r(\underline{x})V'(\underline{x}) - c(\underline{x})V(\underline{x}) \right) - \hat{r}(\underline{x}) \left(V'(\underline{x}) + \frac{1}{2}V''(\underline{x})\Delta + \mathcal{O}(\Delta^2) \right) \\ &\quad + \hat{c}(\underline{x})V(\underline{x}) + \mathcal{O}(\Delta^2) \\ &= -\frac{1}{2}\hat{r}(\underline{x})V''(\underline{x})\Delta + \mathcal{O}(\Delta^2). \end{aligned}$$

Zusammen mit der eingeführten Randbedingung (B.20) gilt:

$$\nu_\Delta(\underline{x}) = \mathcal{O}(\Delta^2).$$

Analog wird bewiesen, dass der Approximationsfehler am anderen Rand bei $x = \bar{x}$ auch quadratische Ordnung hat:

$$\nu_\Delta(\bar{x}) = \frac{1}{2}\hat{r}(\bar{x})V''(\bar{x})\Delta + \mathcal{O}(\Delta^2) = \mathcal{O}(\Delta^2).$$

Somit hat das Differenzenschema auf dem ganzen Gitter \overline{G} die quadratische Approximationsordnung $\mathcal{O}(\Delta^2)$.

Außerdem kann man die Differenzengleichungen (B.26) in Hinblick auf die Koeffizienten (B.24) in folgende Form bringen:

$$C_0V_0 - B_0V_1 = \overline{F}_0, \quad -A_NV_{N-1} + C_NV_N = \overline{F}_N, \quad (\text{B.28})$$

mit den nichtnegativen Koeffizienten

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{r_0}{\Delta} + c_0 > 0, & B_0 &= \frac{r_0}{\Delta} \geq 0, & \bar{F}_0 &= -f_0, \\ A_N &= -\frac{r_N}{\Delta} \geq 0, & C_N &= -\frac{r_N}{\Delta} + c_N > 0, & \bar{F}_N &= -f_N. \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Nun lässt sich der Differenzenoperator (B.22) im fixierten j -ten inneren Gitterpunkt $x_j = \underline{x} + j \cdot \Delta$, $j = 1, \dots, N-1$, von \mathcal{G} betrachten:

$$(\tilde{\Lambda} - \hat{c}_j)V_j = \chi_j(\hat{b}_j V_{\bar{x},j})_{x,j} + \hat{a}_j^+ \hat{b}^{(+1,j)} V_{x,j} + \hat{a}_j^- \hat{b}_j V_{\bar{x},j} - \hat{c}_j V_j, \quad (\tilde{\Lambda} - \hat{c}_j)V_j = \phi_j, \quad x_j \in \mathcal{G},$$

mit den Koeffizienten (B.23)

$$\begin{aligned} \hat{b}_j &= b_{j-\frac{1}{2}} := b(x_j - \frac{\Delta}{2}), & \hat{b}^{(+1,j)} &= \hat{b}_{j+1} = b_{j+\frac{1}{2}} := b(x_j + \frac{\Delta}{2}), & \hat{a}_j^\pm &= \frac{a_j^\pm}{b_j} = \frac{a_j \pm |a_j|}{2b_j}, \\ \hat{c}_j &= c_j > 0, & \phi_j &= F_j, & \chi_j &= \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta|a_j|}{b_j}} > 0, \end{aligned}$$

im Gitterpunkt $x_j \in \mathcal{G}$.

Die Formeln (B.4) für die Differenzenquotienten des Produktes aus den Gitterfunktionen erlauben, den letzten Ausdruck auf das *3-Punkt-Differenzschema*

$$-A_j V_{j-1} + C_j V_j - B_j V_{j+1} = \bar{F}_j, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (\text{B.30})$$

zurückzuführen, dessen Koeffizienten folgendermaßen definiert werden:

$$\begin{aligned} A_j &= \frac{\chi_j b_{j-\frac{1}{2}}}{\Delta^2} - \frac{1}{2\Delta}(a_j - |a_j|)\frac{b_{j-\frac{1}{2}}}{b_j} > 0, & C_j &= A_j + B_j + c_j > 0, \\ B_j &= \frac{\chi_j b_{j+\frac{1}{2}}}{\Delta^2} + \frac{1}{2\Delta}(a_j + |a_j|)\frac{b_{j+\frac{1}{2}}}{b_j} > 0, & \bar{F}_j &= -F_j, \quad j = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Somit wird der Differentialoperator (B.19) mit den Randbedingungen (B.21) nach ihrer Diskretisierung auf die Lösung folgenden linearen Gleichungssystems zurückgeführt:

$$\begin{aligned} C_0 V_0 &- B_0 V_1 &&= \bar{F}_0, & j &= 0, \\ -A_j V_{j-1} &+ C_j V_j &- B_j V_{j+1} &= \bar{F}_j, & j &= 1, \dots, N-1, \\ &-A_N V_{N-1} &+ C_N V_N &= \bar{F}_N, & j &= N. \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Definiert man den $(N+1)$ -dimensionalen Spaltenlösungsvektor \mathcal{V} , den $(N+1)$ -dimensionalen Spaltenvektor der rechten Seite \mathcal{F} und die quadratische tridiagonale $((N+1) \times (N+1))$ -Koeffizientenmatrix \mathcal{A} mit

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= (V_0, V_1, \dots, V_j, \dots, V_{N-1}, V_N)^\top, \\ \mathcal{F} &= -(f_0, F_1, \dots, F_j, \dots, F_{N-1}, f_N)^\top, \end{aligned}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} C_0 & -B_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -A_1 & C_1 & -B_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A_2 & C_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{N-2} & -B_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -A_{N-1} & C_{N-1} & -B_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -A_N & C_N \end{pmatrix}, \quad (\text{B.33})$$

so kann (B.32) in der Form $\mathcal{A}\mathcal{V} = \mathcal{F}$ geschrieben werden.

Das Differenzenschema (B.28), (B.30) ist ein sogenanntes *monotones nichtnegatives Schema*, da die Koeffizienten (B.29) und (B.31) nichtnegativ sind. Für solche Schemata ist bekannt, dass sie stabil in der diskreten Maximum-Norm sind (siehe Duffy [21, Kapitel 9, Abschnitt 9.7]).

Lemma B.2.4 (M-Matrix). *Die quadratische Matrix \mathcal{A} in (B.33) ist eine M-Matrix.*

Beweis. Aus den Koeffizientenbeziehungen (B.29) und (B.31) folgt unmittelbar, dass alle Einträge der Matrix \mathcal{A} in (B.33) außer den Elementen des Hauptdiagonals $C_i > 0$, $i = 0, \dots, N$, nichtpositiv sind. Dabei ist wegen $c_j > 0$, $j = 0, \dots, N$, auch die Bedingung (B.14) erfüllt. Somit ist die Matrix \mathcal{A} in (B.33) nach der Definition B.1.16 eine M-Matrix. \square

Theorem B.2.5. *Das Differenzenschema mit dem Differenzenoperator (B.22) und mit den Randbedingungen (B.25) ist korrekt und konvergent mit quadratischer Konvergenzordnung $\mathcal{O}(\Delta^2)$.*

Beweis. Aus Lemma B.2.4 und Theorem B.1.15 folgt die Invertierbarkeit der Koeffizientenmatrix \mathcal{A} in (B.33), und das Gleichungssystem $\mathcal{A}\mathcal{V} = \mathcal{F}$ hat eine eindeutige Lösung $\mathcal{V} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{F}$. Außerdem gilt für die M-Matrix (B.33)

$$R(\mathcal{A}) = \min_{0 \leq j \leq N} c_j > 0.$$

Dann folgt unmittelbar aus Theorem B.1.18 in Hinblick auf die erhaltene Abschätzung die Stabilität des gegebenen Schemas in der diskreten Maximum-Norm (siehe Beziehung (B.18)):

$$\|\mathcal{V}\|_\infty \leq \frac{1}{R(\mathcal{A})} \|\mathcal{F}\|_\infty.$$

Nun ist das Differenzenschema nach der Definition B.1.11 korrekt. Da es die quadratische Approximationsordnung auf dem Gitter $\bar{\mathcal{G}}$ besitzt, lässt sich wegen seiner Stabilität feststellen, dass es mit Geschwindigkeit $\mathcal{O}(\Delta^2)$ konvergiert. \square

B.3 Zweidimensionale partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

In diesem Anhang wird ein Differenzenschema für eine zweidimensionale partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung entwickelt. Dabei wird in Anhang B.3.1 den Fall ohne gemischte Ableitung und in Anhang B.3.2 den Fall mit gemischter Ableitung betrachtet.

Sei $G = G_1 \times G_2 \subset \mathbb{R}^2$ das kartesische Produkt von offenen Intervallen $G_1 = (\underline{x}_1, \bar{x}_1)$ und $G_2 = (\underline{x}_2, \bar{x}_2)$. Dann ist $\bar{G} = \bar{G}_1 \times \bar{G}_2$ mit $\bar{G}_1 := [\underline{x}_1, \bar{x}_1]$ und $\bar{G}_2 := [\underline{x}_2, \bar{x}_2]$ das kartesische Produkt von abgeschlossenen Intervallen, deren Grenzen durch $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ mit $\Gamma_1 = \bar{G}_1 \setminus G_1 := \{\underline{x}_1, \bar{x}_1\}$ und $\Gamma_2 = \bar{G}_2 \setminus G_2 := \{\underline{x}_2, \bar{x}_2\}$ gegeben sind. Sei weiter $V : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf \bar{G} definierte stetige Funktion $V \in \mathcal{C}^4(\bar{G})$ zweier Variablen $x := (x_1, x_2) \in \bar{G}$, die die Lösung des zweidimensionalen Randwertproblems der Art (B.1)-(B.2) ist und dessen Differentialoperator in (B.1) wegen seiner Linearität als Summe folgender Differentialoperatoren darstellbar ist:

$$(\mathcal{L} - c)V = (\mathcal{L}_1 - c_1)V + (\mathcal{L}_2 - c_2)V + 2\mathcal{L}_{12}V, \quad c = c_1 + c_2, \quad x \in G, \quad (\text{B.34})$$

wobei der Differenzialoperator \mathcal{L}_i , $i = 1, 2$, die Gestalt (B.19) hat und

$$\mathcal{L}_{12} = b_{12}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad x \in G,$$

die gemischte Ableitung enthält.

Annahme B.3.1. Seien die Funktionen a_i , b_i , $i = 1, 2$, c mit $c = c_1 + c_2$ und F hinreichend glatt und genügen der Differenzierbarkeitsbedingungen der Annahme B.2.1. Sei weiter die Diffusionsmatrix $b : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$b(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) & b_{12}(x) \\ b_{12}(x) & b_2(x) \end{pmatrix}$$

positiv definit mit den Koeffizienten $b_i(x) \geq C_{b_i} > 0$, $i = 1, 2$, $x \in \bar{G}$, und $b_{12} \in \mathcal{C}^2(\bar{G})$, sodass der Differentialoperator (B.34) elliptisch ist. Außerdem gelte $b_{12}(\underline{x}_1, x_2) = b_{12}(\bar{x}_1, x_2) = 0$, $x_2 \in \bar{G}_2$, $c(x) > 0$, $x \in \bar{G}$, sowie

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_1}{\partial x_1}(\underline{x}_1, x_2) + a_1(\underline{x}_1, x_2) &\geq 0, & \frac{\partial b_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, x_2) + a_1(\bar{x}_1, x_2) &\leq 0, & x_2 \in \bar{G}_2, \\ \frac{\partial b_2}{\partial x_2}(x_1, \underline{x}_2) + a_2(x_1, \underline{x}_2) &\geq 0, & \frac{\partial b_2}{\partial x_2}(x_1, \bar{x}_2) + a_2(x_1, \bar{x}_2) &\leq 0, & x_1 \in \bar{G}_1. \end{aligned}$$

Es wird weiter vorausgesetzt, dass

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} V(\underline{x}_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} V(\bar{x}_1, x_2) = 0, \quad x_2 \in \bar{G}_2, \quad (\text{B.35})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} V(x_1, \underline{x}_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} V(x_1, \bar{x}_2) = 0, \quad x_1 \in \bar{G}_1, \quad (\text{B.36})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} V(x_1, \underline{x}_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} V(x_1, \bar{x}_2) = 0, \quad x_1 \in \bar{G}_1, \quad (\text{B.37})$$

die Randbedingungen für die Differentialgleichung (B.1) mit dem Differentialoperator (B.34) sind.

Bemerkung B.3.2. Wegen der Bedingung $b_{12}(\underline{x}_1, x_2) = b_{12}(\bar{x}_1, x_2) = 0$, $x_2 \in \bar{G}_2$, entfallen die gemischten Ableitungen $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} V(\underline{x}_1, x_2)$ und $\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} V(\bar{x}_1, x_2)$ für alle $x_2 \in \bar{G}_2$ auf den Rändern $x_1 = \underline{x}_1$ und $x_1 = \bar{x}_1$.

Unter der Annahme B.3.1 lassen sich die Randbedingungen (B.35)-(B.37) nach ihrem Einsetzen in die Differentialgleichung $(\mathcal{L} - c)V = F(x)$ mit dem Differentialoperator (B.34) folgendermaßen äquivalent umschreiben:

$$\begin{aligned}
 r_1 \frac{\partial}{\partial x_1} V + \mathcal{L}_2 V - cV &= f \text{ mit } r_1(\underline{x}_1, x_2) = \frac{\partial b_1}{\partial x_1}(\underline{x}_1, x_2) + a_1(\underline{x}_1, x_2) \geq 0, \quad x_2 \in \overline{G}_2, \\
 r_1 \frac{\partial}{\partial x_1} V + \mathcal{L}_2 V - cV &= f \text{ mit } r_1(\overline{x}_1, x_2) = \frac{\partial b_1}{\partial x_1}(\overline{x}_1, x_2) + a_1(\overline{x}_1, x_2) \leq 0, \quad x_2 \in \overline{G}_2, \\
 \mathcal{L}_1 V + r_2 \frac{\partial}{\partial x_2} V - cV &= f \text{ mit } r_2(x_1, \underline{x}_2) = \frac{\partial b_2}{\partial x_2}(x_1, \underline{x}_2) + a_2(x_1, \underline{x}_2) \geq 0, \quad x_1 \in \overline{G}_1, \\
 \mathcal{L}_1 V + r_2 \frac{\partial}{\partial x_2} V - cV &= f \text{ mit } r_2(x_1, \overline{x}_2) = \frac{\partial b_2}{\partial x_2}(x_1, \overline{x}_2) + a_2(x_1, \overline{x}_2) \leq 0, \quad x_1 \in \overline{G}_1.
 \end{aligned} \tag{B.38}$$

Im Weiteren werden die zu (B.35)-(B.37) äquivalenten Beziehungen (B.38) als Randbedingungen verwendet.

Sei weiter

$$\overline{\mathcal{G}} = \overline{\mathcal{G}}_1 \times \overline{\mathcal{G}}_2 = [x_1^0, \dots, x_1^{N_1}] \times [x_2^0, \dots, x_2^{N_2}]$$

ein auf der kompakten Menge $\overline{\mathcal{G}}$ eingeführtes zweidimensionales äquidistantes Rechtecksgitter mit den Schrittweiten $\Delta_i = \frac{x_i - x_i^0}{N_i}$, $i = 1, 2$, sodass

$$\overline{\mathcal{G}}_i = \left\{ x_i^{j_i} = \underline{x}_i + j_i \cdot \Delta_i, j_i = 0, 1, \dots, N_i \right\}, \quad i = 1, 2,$$

und $N_i + 1$, $i = 1, 2$, die Anzahl der Gitterpunkte in Richtung x_i ist. Außerdem seien

$$\mathcal{G}_i = \left\{ x_i^{j_i} = \underline{x}_i + j_i \cdot \Delta_i, j_i = 1, \dots, N_i - 1 \right\}, \quad i = 1, 2,$$

und

$$\gamma_i = \left\{ \underline{x}_i, \overline{x}_i \right\}, \quad i = 1, 2,$$

die Menge der inneren Gitterpunkte bzw. die Menge der Randgitterpunkte, sodass

$$\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \cup \gamma, \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2, \quad \gamma = \gamma_1 \times \gamma_2,$$

gilt.

Bezeichne $V_\Delta(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}) := V_{j_1, j_2} \in \mathcal{C}_\Delta$ eine auf dem äquidistanten Gitter $\overline{\mathcal{G}}$ definierte Gitterfunktion zweier Variablen mit $(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}) \in \overline{\mathcal{G}}$, wobei \mathcal{C}_Δ der lineare Raum der auf $\overline{\mathcal{G}}$ definierten Gitterfunktionen V_Δ ist.

B.3.1 Gleichung ohne gemischte Ableitung

In diesem Anhang wird ein Differenzenschema für das zweidimensionale Randwertproblem vom Typ (B.1)-(B.2) konstruiert, dessen Differentialoperator (B.34) keine gemischte Ableitung enthält.

Wegen der Bedingung $b_i(x) \geq C_{b_i} > 0$, $i = 1, 2$, $x \in \overline{\mathcal{G}}$, aus der Annahme B.3.1 ist der Differentialoperator (B.34) elliptisch und somit hat die zweidimensionale Randwertaufgabe eine eindeutige Lösung (siehe Samarskii u. Nikolaev [59]).

Analog zu (B.22) approximiert man den Differentialoperator (B.34) ohne gemischte Ableitung

$$(\mathcal{L} - c)V = (\mathcal{L}_1 - c_1)V + (\mathcal{L}_2 - c_2)V, \quad c = c_1 + c_2,$$

mit dem Differenzenoperator mit gestörten Koeffizienten

$$(\tilde{\Lambda}_i - \hat{c}_i)V_\Delta = \chi_{\Delta_i}(\hat{b}_i V_{\bar{x}_i})_{x_i} + \hat{a}_i^+ \hat{b}_i^{(+1_i)} V_{x_i} + \hat{a}_i^- \hat{b}_i V_{\bar{x}_i} - \hat{c}_i V_\Delta, \quad i = 1, 2.$$

Damit wird es möglich, ein Differenzenschema quadratischer Approximationsordnung zu entwickeln:

$$(\tilde{\Lambda}_1 - \hat{c}_1)V_\Delta + (\tilde{\Lambda}_2 - \hat{c}_2)V_\Delta = \phi, \quad x \in \mathcal{G}, \quad (\text{B.39})$$

wobei $\chi_{\Delta_i}(x) = \frac{1}{1+\Re_{\Delta_i}(x)} \in (0, 1]$, $i = 1, 2$, $x \in \mathcal{G}$, mit der „Zellen-Reynoldszahl“ $\Re_{\Delta_i}(x) = \frac{1}{2} \frac{\Delta_i |a_i(x)|}{b_i(x)} \geq 0$, $i = 1, 2$, $x \in \mathcal{G}$, ist. Die Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzenquotienten V_{x_i} bzw. $V_{\bar{x}_i}$, $i = 1, 2$, für die Gitterfunktion V_Δ zweier Variablen werden nach der Definition B.1.2 bestimmt und anstatt der Funktionen χ_i , $i = 1, 2$, und für die rechte Seite F werden ihre diskretisierten Analoga χ_{Δ_i} , $i = 1, 2$, bzw. ϕ verwendet. Wie in Anhang B.2 werden die Koeffizienten des Differentialoperators (B.34) durch

$$\begin{aligned} \hat{b}_1(x_1, x_2) &= b_1(x_1 - \frac{\Delta_1}{2}, x_2), \quad \hat{b}_1(x_1 + \Delta_1, x_2) = \hat{b}_1^{(+1_1)} = b_1(x_1 + \frac{\Delta_1}{2}, x_2), \\ \hat{b}_2(x_1, x_2) &= b_2(x_1, x_2 - \frac{\Delta_2}{2}), \quad \hat{b}_2(x_1, x_2 + \Delta_2) = \hat{b}_2^{(+1_2)} = b_2(x_1, x_2 + \frac{\Delta_2}{2}), \\ \hat{a}_1^\pm(x_1, x_2) &= \frac{a_1^\pm(x_1, x_2)}{b_1(x_1, x_2)}, \quad \hat{a}_2^\pm(x_1, x_2) = \frac{a_2^\pm(x_1, x_2)}{b_2(x_1, x_2)}, \\ \hat{c}(x_1, x_2) &= c(x_1, x_2), \quad \phi(x_1, x_2) = F(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

für alle $x \in \mathcal{G}$, ersetzt, die die zu (B.23) analogen Koeffizienten sind.

Nach Samarskii u. Nikolaev [58, Kapitel 2, Abschnitt 2.4.1] fixiert man zuerst den Index $i = 2$ und schreibt den Differenzenoperator (B.39) in allen inneren Gitterpunkten $x_1^{j_1}$, $j_1 = 1, \dots, N_1 - 1$, um:

$$\begin{aligned} -A_{j_1, j_2}^{(1)} V_{j_1-1, j_2} + \left[\left(A_{j_1, j_2}^{(1)} + B_{j_1, j_2}^{(1)} + c_{j_1, j_2} \right) V_{j_1, j_2} - \tilde{\Lambda}_2 V_{j_1, j_2} \right] - B_{j_1, j_2}^{(1)} V_{j_1+1, j_2} &= -F_{j_1, j_2}, \\ c_{j_1, j_2} &= c(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}) > 0, \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

mit den positiven Koeffizienten

$$\begin{aligned} A_{j_1, j_2}^{(1)} &= \frac{\chi_1(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}) b_1(x_1^{j_1 - \frac{1}{2}}, x_2^{j_2})}{\Delta_1^2} \\ &\quad - \frac{1}{2\Delta_1} \left(a_1(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}) - \left| a_1(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}) \right| \right) \frac{b_1(x_1^{j_1 - \frac{1}{2}}, x_2^{j_2})}{b_1(x_1^{j_1}, x_2^{j_2})}, \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

$$B_{j_1, j_2}^{(1)} = \frac{\chi_1(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}) b_1(x_1^{j_1 + \frac{1}{2}}, x_2^{j_2})}{\Delta_1^2} + \frac{1}{2\Delta_1} \left(a_1(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}) + \left| a_1(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}) \right| \right) \frac{b_1(x_1^{j_1 + \frac{1}{2}}, x_2^{j_2})}{b_1(x_1^{j_1}, x_2^{j_2})}, \quad (\text{B.43})$$

$$\chi_1(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}) = \frac{1}{1 + \Re_1(x_1^{j_1}, x_2^{j_2})} \in (0, 1], \quad \Re_1(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}) = \frac{1}{2} \frac{\Delta_1 |a_1(x_1^{j_1}, x_2^{j_2})|}{b_1(x_1^{j_1}, x_2^{j_2})} \geq 0,$$

für alle $j_1 = 1, \dots, N_1 - 1$ und $j_2 = 1, \dots, N_2 - 1$.

Danach wandelt man bei jedem fixierten Gitterpunkt $x_1^{j_1}$ den Differenzenoperator $\tilde{\Lambda}_2 V_{j_1, j_2}$ in (B.39) für alle $j_2 = 1, \dots, N_2 - 1$, in folgende Form um:

$$\tilde{\Lambda}_2 V_{j_1, j_2} = A_{j_1, j_2}^{(2)} V_{j_1, j_2 - 1} - (A_{j_1, j_2}^{(2)} + B_{j_1, j_2}^{(2)}) V_{j_1, j_2} + B_{j_1, j_2}^{(2)} V_{j_1, j_2 + 1} \quad (\text{B.44})$$

mit den positiven Koeffizienten

$$A_{j_1, j_2}^{(2)} = \frac{\chi_2(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}) b_2(x_1^{j_1}, x_2^{j_2 - \frac{1}{2}})}{\Delta_2^2} - \frac{1}{2\Delta_2} \left(a_2(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}) - \left| a_2(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}) \right| \right) \frac{b_2(x_1^{j_1}, x_2^{j_2 - \frac{1}{2}})}{b_2(x_1^{j_1}, x_2^{j_2})}, \quad (\text{B.45})$$

$$B_{j_1, j_2}^{(2)} = \frac{\chi_2(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}) b_2(x_1^{j_1}, x_2^{j_2 + \frac{1}{2}})}{\Delta_2^2} + \frac{1}{2\Delta_2} \left(a_2(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}) + \left| a_2(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}) \right| \right) \frac{b_2(x_1^{j_1}, x_2^{j_2 + \frac{1}{2}})}{b_2(x_1^{j_1}, x_2^{j_2})}, \quad (\text{B.46})$$

$$\chi_2(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}) = \frac{1}{1 + \Re_2(x_1^{j_1}, x_2^{j_2})} \in (0, 1], \quad \Re_2(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}) = \frac{1}{2} \frac{\Delta_2 |a_2(x_1^{j_1}, x_2^{j_2})|}{b_2(x_1^{j_1}, x_2^{j_2})} \geq 0.$$

Mit Hilfe des erhaltenen Ausdrucks (B.44) für den Differenzenoperator $\tilde{\Lambda}_2 V_{j_1, j_2}$ kommt man zu folgender Beziehung:

$$\left(A_{j_1, j_2}^{(1)} + B_{j_1, j_2}^{(1)} + c_{j_1, j_2} \right) V_{j_1, j_2} - \tilde{\Lambda}_2 V_{j_1, j_2} = - A_{j_1, j_2}^{(2)} V_{j_1, j_2 - 1} + \left[A_{j_1, j_2}^{(1)} + B_{j_1, j_2}^{(1)} + \left(c_{j_1, j_2} + A_{j_1, j_2}^{(2)} + B_{j_1, j_2}^{(2)} \right) \right] V_{j_1, j_2} - B_{j_1, j_2}^{(2)} V_{j_1, j_2 + 1}. \quad (\text{B.47})$$

Die Differenzengleichung (B.39) hat also die Gestalt (B.41), (B.47) mit den in (B.42)-(B.43) und (B.45)-(B.46) bestimmten Koeffizienten.

Weiter betrachtet man die Randbedingungen (B.38) näher, die durch ihre diskretisierten Analoga mit dem Vorwärts- bzw. Rückwärtsdifferenzenquotienten, dem Differenzenoperator (B.39) und den neuen Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 \hat{r}_1(\underline{x}_1, x_2) &= r_1(\underline{x}_1, x_2) \geq 0, & x_2 \in \overline{\mathcal{G}}_2, \\
 \hat{r}_1(\overline{x}_1, x_2) &= r_1(\overline{x}_1, x_2) \leq 0, & x_2 \in \overline{\mathcal{G}}_2, \\
 \hat{r}_2(x_1, \underline{x}_2) &= r_2(x_1, \underline{x}_2) \geq 0, & x_1 \in \overline{\mathcal{G}}_1, \\
 \hat{r}_2(x_1, \overline{x}_2) &= r_2(x_1, \overline{x}_2) \leq 0, & x_1 \in \overline{\mathcal{G}}_1, \\
 \hat{c}(x_1, x_2) &= c(x_1, x_2) > 0, & x \in \gamma, \\
 f_\Delta(x_1, x_2) &= f(x_1, x_2), & x \in \gamma,
 \end{aligned} \tag{B.48}$$

wie in (B.24) ersetzt werden.

Somit lassen sich in Hinblick auf die Koeffizienten (B.40), (B.48) und den Differenzenoperator (B.39) die Randbedingungen (B.38) als diskrete Varianten darstellen:

$$\begin{aligned}
 \hat{r}_1 V_{x_1} + \tilde{\Lambda}_2 V - \hat{c} V &= f_\Delta, & (x_1^0, x_2^{j_2}) &\in \gamma_1 \times \overline{\mathcal{G}}_2, \\
 \hat{r}_1 V_{\overline{x}_1} + \tilde{\Lambda}_2 V - \hat{c} V &= f_\Delta, & (x_1^{N_1}, x_2^{j_2}) &\in \gamma_1 \times \overline{\mathcal{G}}_2, \\
 \tilde{\Lambda}_1 V + \hat{r}_2 V_{x_2} - \hat{c} V &= f_\Delta, & (x_1^{j_1}, x_2^0) &\in \overline{\mathcal{G}}_1 \times \gamma_2, \\
 \tilde{\Lambda}_1 V + \hat{r}_2 V_{\overline{x}_2} - \hat{c} V &= f_\Delta, & (x_1^{j_1}, x_2^{N_2}) &\in \overline{\mathcal{G}}_1 \times \gamma_2.
 \end{aligned} \tag{B.49}$$

Die Randbedingungen für die Gitterfunktion werden an den Stellen $x_1^0 = \underline{x}_1$ und $x_1^{N_1} = \overline{x}_1$ für alle Gitterpunkte $x_2^{j_2}$, $j_2 = 1, \dots, N_2 - 1$, gemäß den zwei ersten Gleichungen in (B.49) nach den Ausdrücken (B.41) und (B.47) folgendermaßen bestimmt:

$$\left[\left(\frac{r_1(x_1^0, x_2^{j_2})}{\Delta_1} + c_{0,j_2} \right) V_{0,j_2} - \tilde{\Lambda}_2 V_{0,j_2} \right] - \frac{r_1(x_1^0, x_2^{j_2})}{\Delta_1} V_{1,j_2} = -f_{0,j_2}, \quad x_1^0 = \underline{x}_1, \tag{B.50}$$

$$\begin{aligned}
 - \left(-\frac{r_1(x_1^{N_1}, x_2^{j_2})}{\Delta_1} \right) V_{N_1-1,j_2} + \left[\left(-\frac{r_1(x_1^{N_1}, x_2^{j_2})}{\Delta_1} + c_{N_1,j_2} \right) V_{N_1,j_2} - \tilde{\Lambda}_2 V_{N_1,j_2} \right] \\
 = -f_{N_1,j_2}, \quad x_1^{N_1} = \overline{x}_1. \tag{B.51}
 \end{aligned}$$

Zur Berechnung der Gitterfunktion in den Eckpunkten $(x_1^0, x_2^0) = (\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ und $(x_1^0, x_2^{N_2}) = (\underline{x}_1, \overline{x}_2)$ verwendet man neben den obigen Beziehungen noch die Randbedingung (B.36):

$$\left[\left(\frac{r_1(x_1^0, x_2^0)}{\Delta_1} + \left(c_{0,0} + \frac{r_2(x_1^0, x_2^0)}{\Delta_2} \right) \right) V_{0,0} - \frac{r_2(x_1^0, x_2^0)}{\Delta_2} V_{0,1} \right] - \frac{r_1(x_1^0, x_2^0)}{\Delta_1} V_{1,0} = -f_{0,0}, \tag{B.52}$$

$$\left[\left(\frac{r_1(x_1^0, x_2^{N_2})}{\Delta_1} + \left(c_{0, N_2} - \frac{r_2(x_1^0, x_2^{N_2})}{\Delta_2} \right) \right) V_{0, N_2} - \left(-\frac{r_2(x_1^0, x_2^{N_2})}{\Delta_2} \right) V_{0, N_2-1} \right] - \frac{r_1(x_1^0, x_2^{N_2})}{\Delta_1} V_{1, N_2} = -f_{0, N_2}. \quad (\text{B.53})$$

Analog bestimmt man die Gitterfunktion in den zwei letzten Ecken $(x_1^{N_1}, x_2^0) = (\bar{x}_1, \underline{x}_2)$ und $(x_1^{N_1}, x_2^{N_2}) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$:

$$- \left(-\frac{r_1(x_1^{N_1}, x_2^0)}{\Delta_1} \right) V_{N_1-1, 0} + \left[\left(-\frac{r_1(x_1^{N_1}, x_2^0)}{\Delta_1} + \left(c_{N_1, 0} + \frac{r_2(x_1^{N_1}, x_2^0)}{\Delta_2} \right) \right) V_{N_1, 0} - \frac{r_2(x_1^{N_1}, x_2^0)}{\Delta_2} V_{N_1, 1} \right] = -f_{N_1, 0}, \quad (\text{B.54})$$

$$- \left(-\frac{r_1(x_1^{N_1}, x_2^{N_2})}{\Delta_1} \right) V_{N_1-1, N_2} + \left[\left(-\frac{r_1(x_1^{N_1}, x_2^{N_2})}{\Delta_1} + \left(c_{N_1, N_2} - \frac{r_2(x_1^{N_1}, x_2^{N_2})}{\Delta_2} \right) \right) V_{N_1, N_2} - \left(-\frac{r_2(x_1^{N_1}, x_2^{N_2})}{\Delta_2} \right) V_{N_1, N_2-1} \right] = -f_{N_1, N_2}. \quad (\text{B.55})$$

Schließlich definiert man die Randbedingungen an den Stellen x_2^0 und $x_2^{N_2}$ für alle Gitterpunkte $x_1^{j_1}$, $j_1 = 1, \dots, N_1 - 1$, gemäß den zwei letzten Gleichungen in (B.49) und nach den Ausdrücken (B.41) und (B.47):

$$- A_{j_1, 0}^{(1)} V_{j_1-1, 0} + \left[\left(A_{j_1, 0}^{(1)} + B_{j_1, 0}^{(1)} + \left(c_{j_1, 0} + \frac{r_2(x_1^{j_1}, x_2^0)}{\Delta_2} \right) \right) V_{j_1, 0} - \frac{r_2(x_1^{j_1}, x_2^0)}{\Delta_2} V_{j_1, 1} \right] - B_{j_1, 0}^{(1)} V_{j_1+1, 0} = -f_{j_1, 0}, \quad (\text{B.56})$$

$$- A_{j_1, N_2}^{(1)} V_{j_1-1, N_2} + \left[\left(A_{j_1, N_2}^{(1)} + B_{j_1, N_2}^{(1)} + \left(c_{j_1, N_2} - \frac{r_2(x_1^{j_1}, x_2^{N_2})}{\Delta_2} \right) \right) V_{j_1, N_2} - \left(-\frac{r_2(x_1^{j_1}, x_2^{N_2})}{\Delta_2} \right) V_{j_1, N_2-1} \right] - B_{j_1, N_2}^{(1)} V_{j_1+1, N_2} = -f_{j_1, N_2}. \quad (\text{B.57})$$

In Anhang B.2 wurde festgestellt, dass das Differenzenschema (B.22) mit den Randbedingungen (B.25) unter Berücksichtigung der Koeffizientenbedingungen (B.23)-(B.24) und der Annahme (B.20) quadratische Approximationsordnung hat. Analog lässt sich zeigen, dass das Differenzenschema (B.39) mit zwei Ortsvariablen x_1 und x_2 , das durch die Randbedingungen (B.49) charakterisiert wird und über die Eigenschaften (B.40), (B.48) verfügt, sowie den Annahmen (B.35)-(B.36) genügt, quadratische Approximationsordnung $\mathcal{O}(|\Delta|^2)$, $|\Delta|^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2$, auf dem zweidimensionalen äquidistanten Rechtecksgitter $\bar{\mathcal{G}}$ hat.

Das durch die Ausdrücke (B.41)-(B.47) definierte Differenzenschema (B.39) mit den durch die Beziehungen (B.50)-(B.57) beschriebenen Randbedingungen (B.49) wird auf ein lineares

Gleichungssystem vom Typ (B.32) zurückgeführt:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{C}_0 \mathbf{V}_0 - \mathbf{B}_0 \mathbf{V}_1 = \mathbf{F}_0, \quad j_1 = 0, \\
 - & \mathbf{A}_{j_1} \mathbf{V}_{j_1-1} + \mathbf{C}_{j_1} \mathbf{V}_{j_1} - \mathbf{B}_{j_1} \mathbf{V}_{j_1+1} = \mathbf{F}_{j_1}, \quad j_1 = 1, \dots, N_1 - 1, \\
 & - \mathbf{A}_{N_1} \mathbf{V}_{N_1-1} + \mathbf{C}_{N_1} \mathbf{V}_{N_1} = \mathbf{F}_{N_1}, \quad j_1 = N_1,
 \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

mit den $(N_2 + 1)$ -dimensionalen Spaltenvektoren

$$\mathbf{V}_{j_1} = \left(V_{j_1,0}, \dots, V_{j_1,N_2} \right)^\top, \quad j_1 = 0, \dots, N_1,$$

für die Gitterfunktion und die rechte Seite

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_0 &= - \left(f_{0,0}, \dots, f_{0,N_2} \right)^\top, \\
 \mathbf{F}_{j_1} &= - \left(f_{j_1,0}, f_{j_1,1}, \dots, f_{j_1,N_2-1}, f_{j_1,N_2} \right)^\top, \quad j_1 = 1, \dots, N_1 - 1, \\
 \mathbf{F}_{N_1} &= - \left(f_{N_1,0}, \dots, f_{N_1,N_2} \right)^\top,
 \end{aligned}$$

sowie mit den diagonalen nichtnegativen $((N_2 + 1) \times (N_2 + 1))$ -Matrizen

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_0 &= \frac{1}{\Delta_1} \text{diag} \left[r_1(x_1^0, x_2^0), \dots, r_1(x_1^0, x_2^{N_2}) \right] \geq 0, \\
 \mathbf{A}_{N_1} &= -\frac{1}{\Delta_1} \text{diag} \left[r_1(x_1^{N_1}, x_2^0), \dots, r_1(x_1^{N_1}, x_2^{N_2}) \right] \geq 0, \\
 \mathbf{A}_{j_1} &= \text{diag} \left[A_{j_1,0}^{(1)}, \dots, A_{j_1,N_2}^{(1)} \right] > 0, \quad j_1 = 1, \dots, N_1 - 1, \\
 \mathbf{B}_{j_1} &= \text{diag} \left[B_{j_1,0}^{(1)}, \dots, B_{j_1,N_2}^{(1)} \right] > 0, \quad j_1 = 1, \dots, N_1 - 1.
 \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

Die übrigen quadratischen $((N_2 + 1) \times (N_2 + 1))$ -Matrizen sind tridiagonal:

$$\mathbf{C}_{j_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{j_1,0} & -\bar{\mathbf{c}}_{j_1,0} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\bar{\mathbf{c}}_{j_1,1} & \mathbf{c}_{j_1,1} & -\bar{\mathbf{c}}_{j_1,1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\bar{\mathbf{c}}_{j_1,2} & \mathbf{c}_{j_1,2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathbf{c}_{j_1,N_2-2} & -\bar{\mathbf{c}}_{j_1,N_2-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\bar{\mathbf{c}}_{j_1,N_2-1} & \mathbf{c}_{j_1,N_2-1} & -\bar{\mathbf{c}}_{j_1,N_2-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\bar{\mathbf{c}}_{j_1,N_2} & \mathbf{c}_{j_1,N_2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.60})$$

für alle $j_1 = 0, \dots, N_1$ und mit den nichtnegativen Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{c}}_{j_1,0} &= \frac{r_2(x_1^{j_1}, x_2^0)}{\Delta_2} \geq 0, \quad \mathbf{c}_{j_1,N_2} = -\frac{r_2(x_1^{j_1}, x_2^{N_2})}{\Delta_2} \geq 0, \quad j_1 = 0, \dots, N_1, \\
 \mathbf{c}_{j_1,j_2} &= A_{j_1,j_2}^{(2)} > 0, \quad \bar{\mathbf{c}}_{j_1,j_2} = B_{j_1,j_2}^{(2)} > 0, \quad j_1 = 0, \dots, N_1, \\
 \mathbf{c}_{0,0} &= \bar{\mathbf{c}}_{0,0} + \frac{r_1(x_1^0, x_2^0)}{\Delta_1} + c_{0,0} > 0, \\
 \mathbf{c}_{0,j_2} &= A_{0,j_2}^{(2)} + B_{0,j_2}^{(2)} + c_{0,j_2} + \frac{r_1(x_1^0, x_2^{j_2})}{\Delta_1} > 0, \\
 \mathbf{c}_{0,N_2} &= \mathbf{c}_{0,N_2} + \frac{r_1(x_1^0, x_2^{N_2})}{\Delta_1} + c_{0,N_2} > 0, \\
 \mathbf{c}_{j_1,0} &= \bar{\mathbf{c}}_{j_1,0} + A_{j_1,0}^{(1)} + B_{j_1,0}^{(1)} + c_{j_1,0} > 0, \quad j_1 = 1, \dots, N_1 - 1, \\
 \mathbf{c}_{j_1,j_2} &= \mathbf{c}_{j_1,j_2} + \bar{\mathbf{c}}_{j_1,j_2} + A_{j_1,j_2}^{(1)} + B_{j_1,j_2}^{(1)} + c_{j_1,j_2} > 0, \quad j_1 = 1, \dots, N_1 - 1, \\
 \mathbf{c}_{j_1,N_2} &= \mathbf{c}_{j_1,N_2} + A_{j_1,N_2}^{(1)} + B_{j_1,N_2}^{(1)} + c_{j_1,N_2} > 0, \quad j_1 = 1, \dots, N_1 - 1, \\
 \mathbf{c}_{N_1,0} &= \bar{\mathbf{c}}_{N_1,0} - \frac{r_1(x_1^{N_1}, x_2^0)}{\Delta_1} + c_{N_1,0} > 0, \\
 \mathbf{c}_{N_1,j_2} &= A_{N_1,j_2}^{(2)} + B_{N_1,j_2}^{(2)} + c_{N_1,j_2} - \frac{r_1(x_1^{N_1}, x_2^{j_2})}{\Delta_1} > 0, \\
 \mathbf{c}_{N_1,N_2} &= \mathbf{c}_{N_1,N_2} - \frac{r_1(x_1^{N_1}, x_2^{N_2})}{\Delta_1} + c_{N_1,N_2} > 0,
 \end{aligned}$$

für alle $j_2 = 1, \dots, N_2 - 1$.

Somit ist (B.39), (B.49) ein monotones nichtnegatives Differenzenschema.

Das System (B.58) lässt sich unter Verwendung einer Blockmatrix in der Form

$$\mathcal{A}\mathcal{V} = \mathcal{F}$$

darstellen, d.h. mit dem \tilde{N} -dimensionalen Spaltenlösungsvektor $\mathcal{V} = (\mathbf{V}_0^\top, \dots, \mathbf{V}_{N_1}^\top)^\top$ und dem Vektor $\mathcal{F} = (\mathbf{F}_0^\top, \dots, \mathbf{F}_{N_1}^\top)^\top$ als rechte Seite, sowie mit der quadratischen $(\tilde{N} \times \tilde{N})$ -Koeffizientenblockmatrix

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_0 & -\mathbf{B}_0 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_1 & \mathbf{C}_1 & -\mathbf{B}_1 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{A}_2 & \mathbf{C}_2 & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{C}_{N_1-2} & -\mathbf{B}_{N_1-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -\mathbf{A}_{N_1-1} & \mathbf{C}_{N_1-1} & -\mathbf{B}_{N_1-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -\mathbf{A}_{N_1} & \mathbf{C}_{N_1} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.61})$$

mit $\tilde{N} = (N_1 + 1) \cdot (N_2 + 1)$, wobei $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{(N_2+1) \times (N_2+1)}$ die $((N_2 + 1) \times (N_2 + 1))$ -Nullmatrix ist.

Lemma B.3.3 (M-Matrix). *Die quadratische Blockmatrix \mathcal{A} in (B.61) ist eine M-Matrix.*

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis von Lemma B.2.4 und folgt somit aus Bedingung (B.14) und den Vorzeichen der Elemente von (B.59)-(B.60). Die Eigenschaft der M-Matrix für (B.61) wird mittels der Kondition $c_{j_1, j_2} > 0$, $j_1 = 0, 1, \dots, N_1$, $j_2 = 0, 1, \dots, N_2$, garantiert. \square

Theorem B.3.4. *Das Differenzenschema (B.39) mit den Randbedingungen (B.49) ist korrekt und konvergent mit der Konvergenzordnung $\mathcal{O}(|\Delta|^2)$, $|\Delta|^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2$.*

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis von Theorem B.2.5. Dabei gilt für die M-Matrix (B.61):

$$R(\mathcal{A}) = \min_{\substack{0 \leq j_1 \leq N_1 \\ 0 \leq j_2 \leq N_2}} c_{j_1, j_2}.$$

Nach Theorem B.1.18 erhält man

$$\|\mathcal{V}\|_\infty \leq \frac{1}{R(\mathcal{A})} \|\mathcal{F}\|_\infty$$

und das Differenzenschema konvergiert mit Geschwindigkeit $\mathcal{O}(|\Delta|^2)$, $|\Delta|^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2$, wegen seiner Stabilität und seiner quadratischer Approximationsordnung auf dem Gitter $\bar{\mathcal{G}}$. \square

B.3.2 Gleichung mit gemischter Ableitung

In diesem Anhang wird eine Erweiterung für das in Anhang B.3.1 diskutierte Differenzenschema (B.39) behandelt, das die gemischte Ableitung im Differentialoperator (B.34) enthält.

Sei $\bar{\mathcal{G}}$ ein äquidistantes Rechtecksgitter und $V_{j_1, j_2} \in \mathcal{C}_\Delta$ eine auf diesem Gitter definierte Gitterfunktion zweier Variablen mit $(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}) \in \bar{\mathcal{G}}$ wie in Anhang B.3.1. Es wird auch vorausgesetzt, dass die Annahme B.3.1 gilt. Die Differentialoperatoren \mathcal{L}_1 und \mathcal{L}_2 ohne gemischte Ableitung in (B.34) werden durch ihre diskreten Analoga (B.39) mit gestörten Koeffizienten ersetzt. Dabei wird der Differentialoperator \mathcal{L}_{12} in (B.34) nach Fleming u. Soner [26, Kapitel IX, Abschnitt IX.3] in Abhängigkeit vom Koeffizienten $b_{12}(x)$ durch den Differenzenoperator Λ_{12} wie folgt approximiert:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{12}V \sim \Lambda_{12}V_\Delta = & \begin{cases} \frac{b_{12}(x_1^{j_1}, x_2^{j_2})}{2\Delta_1\Delta_2} \left[+ \left(2V_{j_1, j_2} + V_{j_1+1, j_2+1} + V_{j_1-1, j_2-1} \right) \right. \\ \quad \left. - \left(V_{j_1+1, j_2} + V_{j_1-1, j_2} + V_{j_1, j_2+1} + V_{j_1, j_2-1} \right) \right], & b_{12}(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}) \geq 0, \\ \frac{b_{12}(x_1^{j_1}, x_2^{j_2})}{2\Delta_1\Delta_2} \left[- \left(2V_{j_1, j_2} + V_{j_1+1, j_2-1} + V_{j_1-1, j_2+1} \right) \right. \\ \quad \left. + \left(V_{j_1+1, j_2} + V_{j_1-1, j_2} + V_{j_1, j_2+1} + V_{j_1, j_2-1} \right) \right], & b_{12}(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}) \leq 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

$$j_1 = 1, \dots, N_1 - 1, \quad j_2 = 1, \dots, N_2 - 1.$$

Im Weiteren werden zur Aufstellung des Differenzenschemas auf Basis eines 9-Punkt-Differenzensternes die folgenden Koeffizientenfunktionen benötigt:

$$\begin{aligned}
 \theta_1(x_1, x_2) = \theta_9(x_1, x_2) &= \frac{b_{12}(x_1, x_2)}{\Delta_1 \Delta_2} \mathbf{1}_{\{b_{12}(x_1, x_2) \geq 0\}}, \\
 \theta_3(x_1, x_2) = \theta_7(x_1, x_2) &= -\frac{b_{12}(x_1, x_2)}{\Delta_1 \Delta_2} \mathbf{1}_{\{b_{12}(x_1, x_2) < 0\}}, \\
 \theta_2(x_1, x_2) = \theta_4(x_1, x_2) &= -\frac{|b_{12}(x_1, x_2)|}{\Delta_1 \Delta_2}, \\
 \theta_6(x_1, x_2) = \theta_8(x_1, x_2) &= -\frac{|b_{12}(x_1, x_2)|}{\Delta_1 \Delta_2}, \\
 \theta_5(x_1, x_2) &= 2 \frac{|b_{12}(x_1, x_2)|}{\Delta_1 \Delta_2},
 \end{aligned} \tag{B.63}$$

für $x \in \mathcal{G}$. Dabei gilt $\theta_1, \theta_3, \theta_5, \theta_7, \theta_9 \geq 0$ und $\theta_2, \theta_4, \theta_6, \theta_8 \leq 0$.

Somit ergibt sich das diskretisierte Randwertproblem zu (B.34) als

$$(\tilde{\Lambda}_1 - \hat{c}_1)V_\Delta + (\tilde{\Lambda}_2 - \hat{c}_2)V_\Delta + 2\Lambda_{12}V_\Delta = \phi, \quad x \in \mathcal{G}, \tag{B.64}$$

wobei die Randbedingungen (B.49) zu berücksichtigen sind. Für (B.64) entwickelt man weiter analog zu den Ausdrücken (B.41) und (B.47) das Differenzenschema quadratischer Approximationsordnung $\mathcal{O}(|\Delta|^2)$, $|\Delta|^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2$, das im Vergleich zu Anhang B.3.1 die gemischte Ableitung enthält, die mittels des Differenzenoperators (B.62) mit den Koeffizienten (B.63) approximiert wird. Die endgültige Differenzengleichung bekommt somit folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
 & -\theta_1(x_1^{j_1}, x_2^{j_2})V_{j_1-1, j_2-1} - \left(A_{j_1, j_2}^{(1)} + \theta_2(x_1^{j_1}, x_2^{j_2})\right)V_{j_1-1, j_2} - \theta_3(x_1^{j_1}, x_2^{j_2})V_{j_1-1, j_2+1} \\
 & + \left[-\left(A_{j_1, j_2}^{(2)} + \theta_4(x_1^{j_1}, x_2^{j_2})\right)V_{j_1, j_2-1} \right. \\
 & + \left(A_{j_1, j_2}^{(1)} + B_{j_1, j_2}^{(1)} + \left(c(x_1^{j_1}, x_2^{j_2}) + A_{j_1, j_2}^{(2)} + B_{j_1, j_2}^{(2)}\right) - \theta_5(x_1^{j_1}, x_2^{j_2})\right)V_{j_1, j_2} \\
 & \quad \left. - \left(B_{j_1, j_2}^{(2)} + \theta_6(x_1^{j_1}, x_2^{j_2})\right)V_{j_1, j_2+1}\right] \\
 & - \theta_7(x_1^{j_1}, x_2^{j_2})V_{j_1+1, j_2-1} - \left(B_{j_1, j_2}^{(1)} + \theta_8(x_1^{j_1}, x_2^{j_2})\right)V_{j_1+1, j_2} - \theta_9(x_1^{j_1}, x_2^{j_2})V_{j_1+1, j_2+1} \\
 & = -F_{j_1, j_2}, \quad j_1 = 1, \dots, N_1 - 1, \quad j_2 = 1, \dots, N_2 - 1, \tag{B.65}
 \end{aligned}$$

mit den positiven Koeffizienten $A_{j_1, j_2}^{(1)}$, $B_{j_1, j_2}^{(1)}$ und $A_{j_1, j_2}^{(2)}$, $B_{j_1, j_2}^{(2)}$, die nach den Formeln (B.42)-(B.43) bzw. (B.45)-(B.46) bestimmt werden.

Die Randbedingungen für die gestellte Differenzenaufgabe (B.64) mit der gemischten Ableitung werden gemäß der Annahme B.3.1 (d.h. nach den Bedingungen (B.35)-(B.37)) durch ihr diskretes Analogon (B.49) beschrieben. Somit lassen sich die Randwerte für alle $x \in \gamma$ analog nach den Beziehungen (B.50)-(B.57) bestimmen. Dies folgt daraus, dass die gemischte Ableitung nach der Annahme B.3.1 für alle $x \in \Gamma$ entfällt.

Das Differenzenschema (B.64) mit den Randbedingungen (B.49) hat die quadratische Approximationsordnung $\mathcal{O}(|\Delta|^2)$, $|\Delta|^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2$, auf dem zweidimensionalen äquidistanten Rechtecksgitter $\bar{\mathcal{G}}$. Dies wird durch die Auswahl von Koeffizienten (B.40), (B.48) bzw. (B.63), sowie die Annahme B.3.1 mit den Randbedingungen (B.35)-(B.37) gesichert.

Genauso wie in Anhang B.3.1 führt man das Differenzenschema (B.64) mit den Randbedingungen (B.49) auf das lineare Gleichungssystem (B.58)

$$\mathcal{A}\mathcal{V} = \mathcal{F}$$

mit der $(\tilde{N} \times \tilde{N})$ -Koeffizientenblockmatrix \mathcal{A} , $\tilde{N} = (N_1 + 1) \cdot (N_2 + 1)$, zurück. Dabei behalten der \tilde{N} -dimensionale Spaltenvektor der rechten Seite \mathcal{F} und alle ihre inneren $((N_2 + 1) \times (N_2 + 1))$ -Matrizen (siehe (B.59)-(B.60)) die ursprüngliche Struktur (siehe Anhang B.3.1). Die Ausnahmen sind dabei \mathbf{A}_{j_1} , \mathbf{B}_{j_1} , \mathbf{C}_{j_1} für $j_1 = 1, \dots, N_1 - 1$. Für diese erhält man folgende tridiagonale Matrizen:

$$\mathbf{A}_{j_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{j_1,0}^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \theta_{j_1,1}^{(1)} & \tilde{\mathbf{A}}_{j_1,1}^{(1)} & \theta_{j_1,1}^{(3)} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{j_1,2}^{(1)} & \tilde{\mathbf{A}}_{j_1,2}^{(1)} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tilde{\mathbf{A}}_{j_1,N_2-2}^{(1)} & \theta_{j_1,N_2-2}^{(3)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \theta_{j_1,N_2-1}^{(1)} & \tilde{\mathbf{A}}_{j_1,N_2-1}^{(1)} & \theta_{j_1,N_2-1}^{(3)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{A}_{j_1,N_2}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (\text{B.66})$$

und

$$\mathbf{B}_{j_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{j_1,0}^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \theta_{j_1,1}^{(7)} & \tilde{\mathbf{B}}_{j_1,1}^{(1)} & \theta_{j_1,1}^{(9)} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{j_1,2}^{(7)} & \tilde{\mathbf{B}}_{j_1,2}^{(1)} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \tilde{\mathbf{B}}_{j_1,N_2-2}^{(1)} & \theta_{j_1,N_2-2}^{(9)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \theta_{j_1,N_2-1}^{(7)} & \tilde{\mathbf{B}}_{j_1,N_2-1}^{(1)} & \theta_{j_1,N_2-1}^{(9)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathbf{B}_{j_1,N_2}^{(1)} \end{pmatrix} \quad (\text{B.67})$$

mit den Koeffizienten $\theta_{j_1,j_2}^{(l)} = \theta_l(x_1^{j_1}, x_2^{j_2})$, $j_2 = 1, \dots, N_2 - 1$, $l = 1, \dots, 7$, und

$$\tilde{\mathbf{A}}_{j_1,j_2}^{(1)} = \mathbf{A}_{j_1,j_2}^{(1)} + \theta_{j_1,j_2}^{(2)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_{j_1,j_2}^{(1)} = \mathbf{B}_{j_1,j_2}^{(1)} + \theta_{j_1,j_2}^{(8)}, \quad j_2 = 1, \dots, N_2 - 1. \quad (\text{B.68})$$

Die Koeffizienten der tridiagonalen Matrix \mathbf{C}_{j_1} , $j_1 = 1, \dots, N_1 - 1$, (siehe (B.60)) werden neu berechnet:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{c}}_{j_1,j_2} &= \mathbf{A}_{j_1,j_2}^{(2)} + \theta_{j_1,j_2}^{(4)}, \\ \mathbf{c}_{j_1,j_2} &= \mathbf{A}_{j_1,j_2}^{(1)} + \mathbf{B}_{j_1,j_2}^{(1)} + \left(\mathbf{c}_{j_1,j_2} + \mathbf{A}_{j_1,j_2}^{(2)} + \mathbf{B}_{j_1,j_2}^{(2)} \right) - \theta_{j_1,j_2}^{(5)}, \\ \bar{\mathbf{c}}_{j_1,j_2} &= \mathbf{B}_{j_1,j_2}^{(2)} + \theta_{j_1,j_2}^{(6)}, \end{aligned} \quad (\text{B.69})$$

für $j_2 = 1, \dots, N_2 - 1$.

Somit kommt man zu der quadratischen $(\tilde{N} \times \tilde{N})$ -Koeffizientenblockmatrix \mathcal{A} wie in (B.61), deren innere $((N_2 + 1) \times (N_2 + 1))$ -Matrizen nach den Beziehungen (B.59)-(B.60) und (B.66)-(B.69) definiert werden. Für diese Matrix gilt folgendes Lemma:

Lemma B.3.5. *Die quadratische Blockmatrix \mathcal{A} ist unter der Nichtnegativitätsbedingung für die Koeffizienten (B.68)-(B.69), d.h.*

$$\tilde{A}_{j_1, j_2}^{(1)}, \tilde{B}_{j_1, j_2}^{(1)}, \mathfrak{c}_{j_1, j_2}, \bar{\mathfrak{c}}_{j_1, j_2} \geq 0 \quad (\text{B.70})$$

für alle $j_1 = 1, \dots, N_1 - 1, j_2 = 1, \dots, N_2 - 1$, eine M-Matrix. Dabei gilt

$$\mathfrak{c}_{j_1, j_2} \geq c_{j_1, j_2} + 2 \frac{|b_{12}(x_1^{j_1}, x_2^{j_2})|}{\Delta_1 \Delta_2} > 0$$

für alle $j_1 = 1, \dots, N_1 - 1, j_2 = 1, \dots, N_2 - 1$.

Beweis. Der Beweis folgt unmittelbar aus Bedingung (B.14) und den Koeffizienten der Matrizen (B.59)-(B.60), (B.66)-(B.67), sowie aus der Nichtnegativität der Koeffizienten (B.68)-(B.69) und der Bedingung $c_{j_1, j_2} > 0, j_1 = 0, 1, \dots, N_1, j_2 = 0, 1, \dots, N_2$. \square

Die Bedingung (B.70) heißt auch *Monotoniebedingung*, unter der die Koeffizientenblockmatrix \mathcal{A} eine M-Matrix ist und das Differenzenschema (B.62), (B.64), (B.49) in der diskreten Maximum-Norm stabil ist.

Somit besagt das Theorem B.1.15, dass die Koeffizientenmatrix \mathcal{A} invertierbar ist, sodass nach Theorem B.1.18

$$\|\mathcal{A}^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{R(\mathcal{A})}, \quad R(\mathcal{A}) = \min_{\substack{0 \leq j_1 \leq N_1 \\ 0 \leq j_2 \leq N_2}} c_{j_1, j_2},$$

gilt. Das Gleichungssystem $\mathcal{A}\mathcal{V} = \mathcal{F}$ besitzt somit eine eindeutige Lösung, wenn die Monotoniebedingung (B.70) erfüllt ist.

Theorem B.3.6. *Das Differenzenschema (B.62), (B.64) gemäß der Annahme B.3.1 und mit den Randbedingungen (B.49) ist unter der Monotoniebedingung (B.70) korrekt und konvergent mit der Konvergenzordnung $\mathcal{O}(|\Delta|^2)$.*

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis von Theorem B.3.4. \square

C.1 Beweis von Lemma 1.2.3

Bezeichne mit $M = (M_t)_{t \geq 0}$ den stochastischen Prozess mit $M_t = \int_0^t e^{\Gamma(s)} dW_s$, $t \geq 0$, und $F : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion mit

$$F(t, x) = e^{-\Gamma(t)}(L_0 + G(t) + \sigma x).$$

Dann ist $L_t = F(t, M_t)$ und $F \in \mathcal{C}^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R})$ mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F(t, x) &= e^{-\Gamma(t)} \left(-D_t(L_0 + G(t) + \sigma x) + G'(t) \right) = -D_t F(t, x) + A_t, \\ \frac{\partial}{\partial x} F(t, x) &= \sigma e^{-\Gamma(t)}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(t, x) &= 0. \end{aligned}$$

Die Anwendung der Itô-Formel liefert:

$$\begin{aligned} dL_t = dF(t, M_t) &= \frac{\partial}{\partial t} F(t, M_t) dt + \frac{\partial}{\partial x} F(t, M_t) dM_t + 0 \\ &= (-D_t F(t, x) + A_t) dt + \sigma e^{-\Gamma(t)} e^{\Gamma(t)} dW_t = (A_t - D_t L_t) dt + \sigma dW_t, \end{aligned}$$

d.h. L genügt der SDE (1.69) und für den Anfangswert gilt wegen $\Gamma(0) = 0$

$$L_0 = l.$$

Somit ist die Beziehung (1.70) bewiesen.

Für den Beweis von (1.71) ergibt sich aus (1.70) mit

$$\Gamma(t) = \Gamma(r) + (\Gamma(t) - \Gamma(r)) \quad \text{und} \quad G(t) = G(r) + (G(t) - G(r))$$

folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned} L_t &= e^{-(\Gamma(t)-\Gamma(r))} \left(e^{-\Gamma(r)} L_0 + e^{-\Gamma(r)} (G(r) + G(t) - G(r)) \right. \\ &\quad \left. + e^{-\Gamma(r)} \sigma \left(\int_0^r e^{\Gamma(s)} dW_s + \int_r^t e^{\Gamma(s)} dW_s \right) \right) \\ &= e^{-(\Gamma(t)-\Gamma(r))} \left(L_r + \int_r^t e^{(\Gamma(s)-\Gamma(r))} A_s ds + \sigma \int_r^t e^{(\Gamma(s)-\Gamma(r))} dW_s \right). \end{aligned}$$

C.2 Beweis von Lemma 1.2.4

Nach der Voraussetzung des Lemmas 1.2.3 sind die stochastischen Prozesse A und D beschränkt und D ist nichtnegativ, d.h. es existieren die Konstanten $C_A, \overline{C}_D > 0$ mit $|A_t| \leq C_A$ und $D_t \in [0, \overline{C}_D]$ für alle $t \geq r$. Damit ist Γ nichtnegativ und monoton wachsend und es gilt

$$|G(t)| = \left| \int_0^t e^{\Gamma(s)} A_s ds \right| \leq C_A \int_0^t e^{\Gamma(s)} ds.$$

Die Darstellung (1.71) liefert

$$L_t^{r,l} = e^{-(\Gamma(t)-\Gamma(r))} l + \int_r^t e^{-(\Gamma(t)-\Gamma(s))} A_s ds + \sigma \int_r^t e^{-(\Gamma(t)-\Gamma(s))} dW_s. \quad (\text{C.1})$$

Wegen $\Gamma(t) - \Gamma(s) \geq 0$ für alle $r \leq s \leq t$ ist

$$|L_t^{r,l}| \leq |l| + C_A(t-r) + \sigma \left| \int_r^t e^{-(\Gamma(t)-\Gamma(s))} dW_s \right|$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[(L_t^{r,l})^2 \right] &\leq 3 \left(l^2 + C_A^2(t-r)^2 + \sigma^2 \int_r^t e^{-2(\Gamma(t)-\Gamma(s))} ds \right) \\ &\leq 3 \left(l^2 + C_A^2(t-r)^2 + \sigma^2(t-r) \right) \leq C(1+l^2)(1+t^2). \end{aligned}$$

Wenn der Prozess D streng positiv ist und es gilt $D_t > C_D > 0$, dann ist $\Gamma(t) - \Gamma(s) > C_D(t - s)$ für alle $s \in [r, t]$. Aus der Darstellung (C.1) folgt somit

$$|L_t^{r,l}| \leq |l| + C_A \int_r^t e^{-C_D(t-s)} ds + \sigma \left| \int_r^t e^{-(\Gamma(t)-\Gamma(s))} dW_s \right|$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(L_t^{r,l})^2] &\leq 3 \left(l^2 + \frac{C_A^2}{C_D^2} + \sigma^2 \int_r^t e^{-2(\Gamma(t)-\Gamma(s))} ds \right) \leq 3 \left(l^2 + \frac{C_A^2}{C_D^2} + \sigma^2 \int_0^t e^{-2C_D(t-s)} ds \right) \\ &\leq 3 \left(l^2 + \frac{C_A^2}{C_D^2} + \frac{\sigma^2}{2C_D} \right) \leq C(1 + l^2). \end{aligned}$$

C.3 Beweis von Theorem 2.1.10

Seien die Bedingungen des Theorems erfüllt und sei die optimale Strategie $\tilde{w}_{i,j,k}^{*n+1}$ für alle $n = 0, \dots, N_\tau - 1$ und $(i, j, k) \in \mathcal{N}_x$ bekannt. Dann kann man das ISLAS (2.45) für alle n in die Matrixform (2.41) umschreiben.

Man setze nun $n = 0$. Unter der Nichtnegativitätsbedingung (B.70) für die Koeffizienten des Differenzschemas (B.64)-(B.65) ist die Blockmatrix \mathcal{A} invertierbar, sodass die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems (2.41) wie folgt bestimmt wird:

$$\tilde{\mathcal{V}}^1 = \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}^0 \tilde{\mathcal{V}}^0 + \mathcal{A}^{-1} \mathcal{F}^0.$$

Für $n = 1$ gilt analog

$$\tilde{\mathcal{V}}^2 = \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}^1 \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}^0 \tilde{\mathcal{V}}^0 + \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}^1 \mathcal{A}^{-1} \mathcal{F}^0 + \mathcal{A}^{-1} \mathcal{F}^1.$$

Die Wiederholung der Schritte erlaubt, die allgemeine Formel für die Lösung nach $n + 1$ Schritten, $n = 0, \dots, N_\tau - 1$, zu erhalten:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{V}}^{n+1} &= \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}^n \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}^{n-1} \dots \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}^2 \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}^1 \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}^0 \tilde{\mathcal{V}}^0 + \\ &\quad \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}^n \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}^{n-1} \dots \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}^2 \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}^1 \mathcal{A}^{-1} \mathcal{F}^0 + \\ &\quad \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}^n \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}^{n-1} \dots \mathcal{A}^{-1} \mathcal{B}^2 \mathcal{A}^{-1} \mathcal{F}^1 + \\ &\quad \dots \\ &\quad \mathcal{A}^{-1} \mathcal{F}^n. \end{aligned} \tag{C.2}$$

Da die Matrix \mathcal{A} invertierbar ist, gilt die Abschätzung (2.43). Außerdem liefert die Nichtnegativität der Koeffizienten in (2.36) für die Matrizen \mathcal{B}^n die Abschätzung (2.44). Dann erhält man mit (2.43)-(2.44) und unter Anwendung der Abschätzung für die diskrete Maximum-Norm

aus der Gleichung (C.2) folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{\mathcal{V}}^{n+1}\|_\infty &\leq \frac{1}{\left(\rho + \frac{1}{\Delta_\tau}\right)^{n+1}} \left(\frac{1}{\Delta_\tau}\right)^{n+1} \|\tilde{\mathcal{V}}^0\|_\infty + \frac{1}{\left(\rho + \frac{1}{\Delta_\tau}\right)^{n+1}} \left(\frac{1}{\Delta_\tau}\right)^n \|\mathcal{F}^0\|_\infty + \\
 &\quad \frac{1}{\left(\rho + \frac{1}{\Delta_\tau}\right)^n} \left(\frac{1}{\Delta_\tau}\right)^{n-1} \|\mathcal{F}^1\|_\infty + \dots + \frac{1}{\left(\rho + \frac{1}{\Delta_\tau}\right)} \|\mathcal{F}^n\|_\infty \\
 &= \frac{1}{\left(\rho + \frac{1}{\Delta_\tau}\right)^{n+1}} \|\tilde{\mathcal{V}}^0\|_\infty + \frac{\Delta_\tau}{1 + \rho\Delta_\tau} \left[\frac{1}{(1 + \rho\Delta_\tau)^n} \|\mathcal{F}^0\|_\infty + \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{(1 + \rho\Delta_\tau)^{n-1}} \|\mathcal{F}^1\|_\infty + \dots + \|\mathcal{F}^n\|_\infty \right]. \tag{C.3}
 \end{aligned}$$

Weiter folgt unmittelbar aus (C.3)

$$\|\tilde{\mathcal{V}}^{n+1}\|_\infty \leq \frac{1}{(1 + \rho\Delta_\tau)^{n+1}} \|\tilde{\mathcal{V}}^0\|_\infty + \frac{\Delta_\tau}{1 + \rho\Delta_\tau} \max_{0 \leq n' \leq n} \|\mathcal{F}^{n'}\|_\infty \sum_{n'=0}^n \frac{1}{(1 + \rho\Delta_\tau)^{n'}}. \tag{C.4}$$

Für die geometrische Reihe $S_n = \sum_{n'=0}^n \frac{1}{(1 + \rho\Delta_\tau)^{n'}}$ ergibt sich wegen $\rho\Delta_\tau > 0$, dass $\frac{1}{1 + \rho\Delta_\tau} < 1$ und

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{1 + \rho\Delta_\tau}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{1 + \rho\Delta_\tau}}.$$

Somit ist die geometrische Reihe konvergent. Nun kann man die Abschätzung (C.4) folgendermaßen umschreiben:

$$\|\tilde{\mathcal{V}}^{n+1}\|_\infty \leq \frac{1}{(1 + \rho\Delta_\tau)^{n+1}} \|\tilde{\mathcal{V}}^0\|_\infty + \frac{1}{\rho} \left(1 - \frac{1}{(1 + \rho\Delta_\tau)^{n+1}}\right) \max_{0 \leq n' \leq n} \|\mathcal{F}^{n'}\|_\infty. \tag{C.5}$$

Weil $(1 + \rho\Delta_\tau)^{n+1} > 1 + \rho\Delta_\tau(n + 1)$, bekommt die Ungleichung (C.5) folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{\mathcal{V}}^{n+1}\|_\infty &\leq \frac{1}{1 + \rho\Delta_\tau(n + 1)} \|\tilde{\mathcal{V}}^0\|_\infty + \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{1}{1 + \rho\Delta_\tau(n + 1)}\right) \max_{0 \leq n' \leq n} \|\mathcal{F}^{n'}\|_\infty \\
 &= \frac{1}{1 + \rho\tau_{n+1}} \|\tilde{\mathcal{V}}^0\|_\infty + \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{1}{1 + \rho\tau_{n+1}}\right) \max_{0 \leq n' \leq n} \|\mathcal{F}^{n'}\|_\infty \\
 &\leq M_1 \|\tilde{\mathcal{V}}^0\|_\infty + M_2 \max_{0 \leq n' \leq n} \|\mathcal{F}^{n'}\|_\infty,
 \end{aligned}$$

mit $M_1 = 1$ und $M_2 = \frac{2}{\rho}$ für alle $n = 0, \dots, N_\tau - 1$.

C.4 Beweis von Theorem 2.1.13

Das Differenzenschema (2.45) ist äquivalent zu (2.32). Dann hat das Differenzenschema (2.32) in Hinblick auf die mittels der CFL-Bedingung (2.33) getätigte lineare Interpolation (2.35) fol-

gende Gestalt:

$$\sup_{v \in \mathbb{U}^{n+1}(q_i)} \left\{ -\mathfrak{h}_i \cdot \frac{(v - |v|)}{2} \frac{(\varphi_{i+1,j,k}^n - \varphi_{i,j,k}^n)}{\Delta_q} - \mathfrak{h}_i \cdot \frac{(v + |v|)}{2} \frac{(\varphi_{i,j,k}^n - \varphi_{i-1,j,k}^n)}{\Delta_q} + F(q_i, s_j, v) \right\} - \frac{\varphi_{i,j,k}^{n+1} - \varphi_{i,j,k}^n}{\Delta_\tau} + (\Lambda - \rho) \varphi_{i,j,k}^{n+1} = 0. \quad (\text{C.6})$$

Für die HJB-Gleichung (2.7) im Gitterpunkt $(\tau_{n+1}, q_i, s_j, \pi_k) \in \overline{\mathcal{G}}$ gilt:

$$-\left(\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi\right)_{i,j,k}^{n+1} + ((\mathcal{L} - \rho) \varphi)_{i,j,k}^{n+1} + \sup_{y \in \mathbb{U}^{n+1}(q_i)} \left\{ -\mathfrak{h}_i \cdot y \left(\frac{\partial}{\partial q} \varphi\right)_{i,j,k}^{n+1} + F(q_i, s_j, y) \right\} = 0. \quad (\text{C.7})$$

Es sei bemerkt, dass folgende Approximationen für die partielle Ableitung nach der Zeit τ , den Differentialoperator \mathcal{L} (siehe Anhang B.3.2) und die partielle Ableitung nach der Füllhöhe q gelten:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{i,j,k}^{n+1} - \varphi_{i,j,k}^n}{\Delta_\tau} &= (\varphi)_{i,j,k}^{n+1} + \mathcal{O}(\Delta_\tau), \\ (\Lambda - \rho) \varphi_{i,j,k}^{n+1} &= ((\mathcal{L} - \rho) \varphi)_{i,j,k}^{n+1} + \mathcal{O}(\Delta_s^2 + \Delta_\pi^2), \\ \left(\frac{\partial}{\partial q} \varphi\right)_{i,j,k}^{n+1} &= \left(\frac{\partial}{\partial q} \varphi\right)_{i,j,k}^n + \mathcal{O}(\Delta_\tau). \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Darüber hinaus erhält man mit der letzten Beziehung aus (C.8) gemeinsam mit der CFL-Bedingung (2.33) und der linearen Interpolation (2.35) folgende Approximation:

$$\begin{aligned} -\mathfrak{h}_i \cdot y \left(\frac{\partial}{\partial q} \varphi\right)_{i,j,k}^{n+1} &= -\mathfrak{h}_i \cdot \frac{(y - |y|)}{2} \frac{(\varphi_{i+1,j,k}^n - \varphi_{i,j,k}^n)}{\Delta_q} \\ &\quad - \mathfrak{h}_i \cdot \frac{(y + |y|)}{2} \frac{(\varphi_{i,j,k}^n - \varphi_{i-1,j,k}^n)}{\Delta_q} + \mathcal{O}(\Delta_\tau + \Delta_q). \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Zum Schluss liefert die Anwendung der Eigenschaft

$$\sup_{v \in \mathbb{U}(q)} f(v) - \sup_{y \in \mathbb{U}(q)} g(y) \leq \sup_{v \in \mathbb{U}(q)} (f(v) - g(v))$$

zusammen mit dem Einsetzen der Beziehungen (C.6)-(C.9) in (2.47) den Ausdruck:

$$\begin{aligned} &\left\| \mathcal{D}_{i,j,k}^{n+1} \left(\Delta_\tau, \Delta_x, \varphi_{i,j,k}^{n+1}, \varphi_{i,j+1,k}^{n+1}, \varphi_{i,j-1,k}^{n+1}, \{\varphi_{i,j,l}^{n+1}\}_{l \neq k}, \{\varphi_{i,j,k}^n\} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\sup_{y \in \mathbb{U}(q)} \left\{ -\varphi_\tau - \mathfrak{h}(q) \cdot y \frac{\partial}{\partial q} \varphi + F(x, y) + (\mathcal{L} - \rho) \varphi \right\} \right)_{i,j,k}^{n+1} \right\|_\infty \leq \\ &\left\| \sup_{v \in \mathbb{U}^{n+1}(q_i)} \left\{ -\mathfrak{h}_i \cdot \frac{(v - |v|)}{2} \frac{(\varphi_{i+1,j,k}^n - \varphi_{i,j,k}^n)}{\Delta_q} - \mathfrak{h}_i \cdot \frac{(v + |v|)}{2} \frac{(\varphi_{i,j,k}^n - \varphi_{i-1,j,k}^n)}{\Delta_q} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathfrak{h}_i \cdot v \left(\frac{\partial}{\partial q} \varphi\right)_{i,j,k}^{n+1} \right\} + \mathcal{O}(\Delta_\tau + \Delta_s^2 + \Delta_\pi^2) \right\|_\infty = \mathcal{O}(\Delta_\tau + \Delta_q + \Delta_s^2 + \Delta_\pi^2), \end{aligned}$$

woraus unmittelbar die Konsistenz folgt.

Somit ist bewiesen, dass das ISLAS (2.45) die HJB-Gleichung (2.7) auf dem ganzen Gitter $\bar{\mathcal{G}}$ mit der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta_\tau + \Delta_q + \Delta_s^2 + \Delta_\pi^2)$ approximiert.

C.5 Beweis von Theorem 2.1.15

In Hinblick auf die in Anhang B.3.2 eingeführte Approximation (B.65) für den die gemischte Ableitung enthaltenen Differentialoperator (2.10) (mit der Zeitumkehr) lässt sich das Differenzschema (2.45) mit dem Differenzenoperator Λ für alle $n = 0, \dots, N_\tau - 1$, $i = 1, \dots, N_q - 1$, $j = 1, \dots, N_s - 1$ und $k = 1, \dots, N_\pi - 1$ wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{i,j,k}^{n+1} \left(\Delta_\tau, \Delta_x, \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1}, \tilde{V}_{i,j+1,k}^{n+1}, \tilde{V}_{i,j-1,k}^{n+1}, \{\tilde{V}_{i,j,l}^{n+1}\}_{l \neq k}, \{\tilde{V}_{i,j,k}^n\} \right) = \\ - \theta_1(s_j, \pi_k) \tilde{V}_{i,j-1,k-1}^{n+1} - \tilde{A}_{j,k}^{(\pi)} \tilde{V}_{i,j,k-1}^{n+1} - \theta_3(s_j, \pi_k) \tilde{V}_{i,j+1,k-1}^{n+1} \\ - \underline{c}_{j,k} \tilde{V}_{i,j-1,k}^{n+1} + \underline{c}_{j,k} \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1} - \bar{c}_{j,k} \tilde{V}_{i,j+1,k}^{n+1} \\ - \theta_7(s_j, \pi_k) \tilde{V}_{i,j-1,k+1}^{n+1} - \tilde{B}_{j,k}^{(\pi)} \tilde{V}_{i,j,k+1}^{n+1} - \theta_9(s_j, \pi_k) \tilde{V}_{i,j+1,k+1}^{n+1} \\ - \sup_{y \in \mathbb{U}^{n+1}(q_i)} \left\{ A_{i,j,k}^{(q),n} \tilde{V}_{i-1,j,k}^n + C_{i,j,k}^{(q),n} \tilde{V}_{i,j,k}^n + B_{i,j,k}^{(q),n} \tilde{V}_{i+1,j,k}^n + F_{i,j,k}^n \right\}, \quad (\text{C.10}) \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten $\theta_m(s_j, \pi_k) \geq 0$, $m = \{1, 3, 7, 9\}$, und $\tilde{A}_{j,k}^{(\pi)}, \tilde{B}_{j,k}^{(\pi)}$, sowie $\underline{c}_{j,k}, \underline{c}_{j,k}, \bar{c}_{j,k}$, nach den Formeln (B.63) und (B.68) bzw. (B.69) aus Anhang B.3.2 bestimmt werden und von q_i unabhängig sind. Dabei hängen alle Koeffizienten $A_{i,j,k}^{(q),n}, B_{i,j,k}^{(q),n}, C_{i,j,k}^{(q),n}$ und $F_{i,j,k}^n$ von der Strategie $y =: \tilde{w}_{i,j,k}^{n+1}$ ab. Es sei daran erinnert, dass die Argumente s und π der Koeffizienten in Anhang B.3.2 vertauscht sind, sodass $x_1 = \pi$ und $x_2 = s$ gilt.

Zuerst wird die Behauptung des Theorems 2.1.15 für alle Gitterpunkte mit Indizes $\{i, j + 1, k\}$ bewiesen, u.z. für den Fall $\Delta v_{i,j+1,k}^{n+1} \geq 0$.

Seien $y \in \mathbb{U}^{n+1}(q_i)$ und $v \in \mathbb{U}^{n+1}(q_i)$ die zulässigen Strategien im Differenzschema (2.45) für den Fall $\tilde{V}_{i,j+1,k}^{n+1} + \Delta v_{i,j+1,k}^{n+1}$ bzw. $\tilde{V}_{i,j+1,k}^{n+1}$. Da die Koeffizienten des Differenzenoperators Λ von den Strategien y und v unabhängig sind, gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{i,j,k}^{n+1} \left(\Delta_\tau, \Delta_x, \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1}, \tilde{V}_{i,j+1,k}^{n+1} + \Delta v_{i,j+1,k}^{n+1}, \tilde{V}_{i,j-1,k}^{n+1}, \{\tilde{V}_{i,j,l}^{n+1}\}_{l \neq k}, \{\tilde{V}_{i,j,k}^n\} \right) \\ - \mathcal{D}_{i,j,k}^{n+1} \left(\Delta_\tau, \Delta_x, \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1}, \tilde{V}_{i,j+1,k}^{n+1}, \tilde{V}_{i,j-1,k}^{n+1}, \{\tilde{V}_{i,j,l}^{n+1}\}_{l \neq k}, \{\tilde{V}_{i,j,k}^n\} \right) = \\ \sup_{y \in \mathbb{U}^{n+1}(q_i)} \left\{ A_{i,j,k}^{(q),n}(y) \tilde{V}_{i-1,j,k}^n + C_{i,j,k}^{(q),n}(y) \tilde{V}_{i,j,k}^n + B_{i,j,k}^{(q),n}(y) \tilde{V}_{i+1,j,k}^n + F_{i,j,k}^n(y) \right\} \\ - \sup_{v \in \mathbb{U}^{n+1}(q_i)} \left\{ A_{i,j,k}^{(q),n}(v) \tilde{V}_{i-1,j,k}^n + C_{i,j,k}^{(q),n}(v) \tilde{V}_{i,j,k}^n + B_{i,j,k}^{(q),n}(v) \tilde{V}_{i+1,j,k}^n + F_{i,j,k}^n(v) \right\} - \bar{c}_{j,k} \Delta v_{i,j+1,k}^{n+1} \leq 0, \end{aligned}$$

wobei bei der Herleitung der Ungleichung (2.48) für den Fall $\Delta v_{i,j+1,k}^{n+1} \geq 0$ die Eigenschaft

$$\sup_{y \in \mathbb{U}(q)} f(y) - \sup_{v \in \mathbb{U}(q)} g(v) \leq \sup_{y \in \mathbb{U}(q)} (f(y) - g(y))$$

und die Nichtnegativität des Koeffizienten $\bar{c}_{j,k}$ (siehe (B.69)) verwendet wurden.

Analog wird die Monotonieeigenschaft (2.48) auch für $\Delta v_{i,j-1,k}^{n+1} \geq 0$ und $\{\Delta v_{i,j,l}^{n+1}\}_{l \neq k} \geq 0$ bewiesen.

Sei $\Delta v^{n+1} > 0$ für den Fall aller Indizes $\{i, j, k\}$. Dann gilt nach (C.10):

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_{i,j,k}^{n+1} \left(\Delta_\tau, \Delta_x, \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1} + \Delta v^{n+1}, \tilde{V}_{i,j+1,k}^{n+1}, \tilde{V}_{i,j-1,k}^{n+1}, \{\tilde{V}_{i,j,l}^{n+1}\}_{l \neq k}, \{\tilde{V}_{i,j,k}^n\} \right) \\ & - \mathcal{D}_{i,j,k}^{n+1} \left(\Delta_\tau, \Delta_x, \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1}, \tilde{V}_{i,j+1,k}^{n+1}, \tilde{V}_{i,j-1,k}^{n+1}, \{\tilde{V}_{i,j,l}^{n+1}\}_{l \neq k}, \{\tilde{V}_{i,j,k}^n\} \right) = \\ & \sup_{y \in U^{n+1}(q_i)} \left\{ A_{i,j,k}^{(q),n}(y) \tilde{V}_{i-1,j,k}^n + C_{i,j,k}^{(q),n}(y) \tilde{V}_{i,j,k}^n + B_{i,j,k}^{(q),n}(y) \tilde{V}_{i+1,j,k}^n + F_{i,j,k}^n(y) \right\} \\ & - \sup_{v \in U^{n+1}(q_i)} \left\{ A_{i,j,k}^{(q),n}(v) \tilde{V}_{i-1,j,k}^n + C_{i,j,k}^{(q),n}(v) \tilde{V}_{i,j,k}^n + B_{i,j,k}^{(q),n}(v) \tilde{V}_{i+1,j,k}^n + F_{i,j,k}^n(v) \right\} + c_{j,k} \Delta v^{n+1} > 0, \end{aligned}$$

da nach (B.69) und in Hinblick auf die Nichtnegativität der Koeffizienten aus (B.70) $c_{j,k} > 0$ ist. Somit gilt Ungleichung (2.49).

Sei nun $\Delta v^n \geq 0$. Die Eigenschaft (2.48) folgt aus

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_{i,j,k}^{n+1} \left(\Delta_\tau, \Delta_x, \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1}, \tilde{V}_{i,j+1,k}^{n+1}, \tilde{V}_{i,j-1,k}^{n+1}, \{\tilde{V}_{i,j,l}^{n+1}\}_{l \neq k}, \{\tilde{V}_{i,j,k}^n + \Delta v^n\} \right) \\ & - \mathcal{D}_{i,j,k}^{n+1} \left(\Delta_\tau, \Delta_x, \tilde{V}_{i,j,k}^{n+1}, \tilde{V}_{i,j+1,k}^{n+1}, \tilde{V}_{i,j-1,k}^{n+1}, \{\tilde{V}_{i,j,l}^{n+1}\}_{l \neq k}, \{\tilde{V}_{i,j,k}^n\} \right) = \\ & \sup_{y \in U^{n+1}(q_i)} \left\{ A_{i,j,k}^{(q),n}(y) \tilde{V}_{i-1,j,k}^n + C_{i,j,k}^{(q),n}(y) \tilde{V}_{i,j,k}^n + B_{i,j,k}^{(q),n}(y) \tilde{V}_{i+1,j,k}^n + F_{i,j,k}^n(y) \right\} - \\ & \sup_{v \in U^{n+1}(q_i)} \left\{ A_{i,j,k}^{(q),n}(v) \tilde{V}_{i-1,j,k}^n + C_{i,j,k}^{(q),n}(v) (\tilde{V}_{i,j,k}^n + \Delta v^n) + B_{i,j,k}^{(q),n}(v) \tilde{V}_{i+1,j,k}^n + F_{i,j,k}^n(v) \right\} \\ & \leq -\Delta v^n \sup_{y \in U^{n+1}(q_i)} \left\{ C_{i,j,k}^{(q),n}(y) \right\} \leq 0. \end{aligned}$$

Die Bedingung (2.48) ist wegen der Nichtnegativität des Koeffizienten $C_{i,j,k}^{(q),n}$ erfüllt. Analog wird die Monotonieeigenschaft auch für $\Delta v_{i-1,j,k}^n \geq 0$ und $\Delta v_{i+1,j,k}^n \geq 0$ gezeigt. Darüber hinaus gelten die Ungleichungen (2.48)-(2.49) für alle Randpunkte. Somit ist die Monotonie für das ISLAS (2.45) bewiesen.

Bemerkung C.5.1. Die Monotonieeigenschaft (2.48)-(2.49) des ISLAS (2.45) und damit auch der Beweis des Theorems 2.1.15 basiert wesentlich auf den Nichtnegativitätsbedingungen für die Koeffizienten in (2.36) und (B.70).

C.6 Beweis von Theorem 2.1.19

Gemäß der Beziehung (2.41) lässt sich das ISLAS (2.45) in folgender Matrixform darstellen:

$$\mathcal{A}\tilde{\mathcal{V}}^{n+1} = \sup_{y \in \mathcal{U}^{n+1}} \left\{ \mathcal{B}^n(y)\tilde{\mathcal{V}}^n + \mathcal{F}^n(y) \right\}, \quad n = 0, \dots, N_\tau - 1. \quad (\text{C.11})$$

Seien nun $\tilde{\mathcal{V}}^n$ und \tilde{v}^n , $\tilde{\mathcal{V}}^n \geq \tilde{v}^n$, zwei Lösungen des Differenzenschemas (C.11), zu deren Bestimmung die Strategien y und v eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\tilde{\mathcal{V}}^{n+1} &= \sup_{y \in \mathcal{U}^{n+1}} \left\{ \mathcal{B}^n(y)\tilde{\mathcal{V}}^n + \mathcal{F}^n(y) \right\}, \\ \mathcal{A}\tilde{v}^{n+1} &= \sup_{v \in \mathcal{U}^{n+1}} \left\{ \mathcal{B}^n(v)\tilde{v}^n + \mathcal{F}^n(v) \right\}, \quad n = 0, \dots, N_\tau - 1. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

In Hinblick auf die Eigenschaft

$$\sup_{y \in \mathcal{U}(q)} f(y) - \sup_{v \in \mathcal{U}(q)} g(v) \geq \inf_{y \in \mathcal{U}(q)} (f(y) - g(y))$$

folgt aus (C.12) folgende Ungleichung:

$$\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{V}}^{n+1} - \tilde{v}^{n+1}) \geq \inf_{y \in \mathcal{U}^{n+1}} \left\{ \mathcal{B}^n(y)(\tilde{\mathcal{V}}^n - \tilde{v}^n) \right\}.$$

Sei

$$\tilde{y}^* = \arg \inf_{y \in \mathcal{U}^{n+1}} \left\{ \mathcal{B}^n(y)(\tilde{\mathcal{V}}^n - \tilde{v}^n) \right\}.$$

Dann gilt für die letzte Ungleichung

$$\mathcal{A}(\tilde{\mathcal{V}}^{n+1} - \tilde{v}^{n+1}) \geq \mathcal{B}^n(\tilde{y}^*)(\tilde{\mathcal{V}}^n - \tilde{v}^n). \quad (\text{C.13})$$

Da die Koeffizientenblockmatrix \mathcal{A} eine M-Matrix ist, gilt nach Bemerkung B.1.17 $\mathcal{A}^{-1} \geq 0$. Außerdem sind alle Elemente der Matrix \mathcal{B}^n nichtnegativ, d.h. $\mathcal{B}^n \geq 0$. Somit bekommt man mit $\tilde{\mathcal{V}}^n \geq \tilde{v}^n$ folgende Abschätzung für (C.13):

$$\tilde{\mathcal{V}}^{n+1} - \tilde{v}^{n+1} \geq \mathcal{A}^{-1}\mathcal{B}^n(\tilde{y}^*)(\tilde{\mathcal{V}}^n - \tilde{v}^n) \geq 0, \quad n = 0, \dots, N_\tau - 1,$$

woraus die diskrete No-Arbitrage-Bedingung folgt.

- [1] J. H. Ahlberg and E. N. Nilson. Convergence Properties of the Spline Fit. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 11(1):95–104, 1963.
- [2] G. Barles. *Convergence of Numerical Schemes for Degenerate Parabolic Equations Arising in Finance Theory*. Numerical Methods in Finance. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [3] G. Barles and P. E. Souganidis. Convergence of Approximation Schemes for Fully Nonlinear Second Order Equations. *Asymptotic Analysis*, 4:271–283, 1991.
- [4] N. Bäuerle and U. Rieder. Portfolio Optimization with Markov-Modulated Stock Prices and Interest Rates. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(3):442–447, 2004.
- [5] N. Bäuerle and U. Rieder. Control Improvement for Jump-Diffusion Processes with Applications to Finance. *Applied Mathematics and Optimization*, 65(1):1–14, 2012.
- [6] N. Bäuerle and V. Riess. Gas Storage Valuation with Regime Switching. *Energy Systems*, 7(3):499–528, 2016.
- [7] F. E. Benth, J. Lempa, and T. K. Nilssen. On the Optimal Exercise of Swing Options in Electricity Markets. *The Journal of Energy Markets*, 4(4):3–28, 2007.
- [8] T. Björk, M. H. A. Davis, and C. Landén. Optimal Investment Under Partial Information. *Mathematical Methods of Operations Research*, 71(2):371–399, 2010.
- [9] S. Brendle. Portfolio Selection under Incomplete Information. *Stochastic Processes and their Applications*, 116(5):701–723, 2006.
- [10] R. Carmona and M. Ludkovski. Valuation of Energy Storage: An Optimal Switching Approach. *Quantitative Finance*, 10(4):359–374, 2010.

- [11] Z. Chen and P. A. Forsyth. A Semi-Lagrangian Approach for Natural Gas Storage Valuation and Optimal Operation. *Technical report, David R. Cheriton School of Computer Science, University of Waterloo, Waterloo, ON*, 2006.
- [12] Z. Chen and P. A. Forsyth. A Semi-Lagrangian Approach for Natural Gas Storage Valuation and Optimal Operation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 30(1):339–368, 2007.
- [13] Z. Chen and P. A. Forsyth. *Nonlinear Models in Mathematical Finance: New Research Trends in Option Pricing. Chapter 9: Pricing Hydroelectric Power Plants with/without Operational Restrictions: A Stochastic Control Approach*. Nova Science Publishers, Inc., 2008.
- [14] Z. Chen and P. A. Forsyth. Implications of a Regime-Switching Model on Natural Gas Storage Valuation and Optimal Operation. *Quantitative Finance*, 10(2):159–176, 2010.
- [15] R. Company, L. Jódar, M. Fakharany, and M.-C. Casabán. Removing the Correlation Term in Option Pricing Heston Model: Numerical Analysis and Computing. *Abstract and Applied Analysis*, pages 1–11, 2013.
- [16] R. Cont and P. Tankov. *Financial Modelling with Jump Processes*. Financial Mathematics Series. Chapman & Hall, 2004.
- [17] R. Cont and E. Voltchkova. A Finite Difference Scheme for Option Pricing in Jump Diffusion and Exponential Lévy Models. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 43(4):1596–1626, 2005.
- [18] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy. Über die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, 100:32–74, 1928.
- [19] M. Crandall, H. Ishii, and P. L. Lions. User’s Guide to Viscosity Solutions of Second Order Partial Differential Equations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 27(1):1–67, 1992.
- [20] Y. d’Halluin, P. A. Forsyth, and G. Labahn. A Semi-Lagrangian Approach for American Asian Options Under Jump Diffusion. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27(1):315–345, 2005.
- [21] D. J. Duffy. *Finite Difference Methods in Financial Engineering: A Partial Differential Equation Approach*. Wiley Finance Series. John Wiley & Sons, Ltd, 2006.
- [22] R. J. Elliott, L. Aggoun, and J. B. Moore. *Hidden Markov Models - Estimation and Control*. Applications of Mathematics. Springer, New York, 1995.
- [23] M. Eriksson, J. Lempa, and T. K. Nilssen. Swing Options in Commodity Markets: A Multidimensional Lvy Diffusion Model. *Mathematical Methods of Operations Research*, 79(1):31–67, 2014.

- [24] C. Erlwein, F. E. Benth, and R. Mamon. HMM Filtering and Parameter Estimation of an Electricity Spot Price Model. *Energy Economics*, 32(5):1034–1043, 2010.
- [25] W. Fleming and R. Rishel. *Deterministic and Stochastic Optimal Control*. Applications of Mathematics. Springer, 1975.
- [26] W. Fleming and H. Soner. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer, New York, second edition, 2006.
- [27] P. A. Forsyth and G. Labahn. Numerical Methods for Controlled Hamilton-Jacobi-Bellman PDEs in Finance. *Journal of Computational Finance*, 2007.
- [28] P. A. Forsyth and K. R. Vetzal. *Handbook of Computational Finance. Chapter 18: Numerical Methods for Nonlinear PDEs in Finance*. Springer Handbooks of Computational Statistics. Springer, Berlin - Heidelberg, 2012.
- [29] R. Frey, A. Gabih, and R. Wunderlich. Portfolio Optimization under Partial Information with Expert Opinions. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 15(1): 1–18, 2012.
- [30] R. Frey, A. Gabih, and R. Wunderlich. Portfolio Optimization under Partial Information with Expert Opinions: A Dynamic Programming Approach. *Communications on Stochastic Analysis*, 8(1):49–79, 2014.
- [31] A. Gabih, H. Kondakji, J. Sass, and R. Wunderlich. Expert Opinions and Logarithmic Utility Maximization in a Market with Gaussian Drift. *Communications on Stochastic Analysis*, 8(1):27–47, 2014.
- [32] F. R. Gantmacher. *Matrizentheorie*. Springer, 1986.
- [33] T. Haentjens and K. in 't Hout. ADI Schemes for Pricing American Options Under the Heston Model. *Applied Mathematical Finance*, 22(3):207–237, 2015.
- [34] I. Halperin and A. Itkin. Pricing Illiquid Options with $N + 1$ Liquid Proxies Using Mixed Dynamic-Static Hedging. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 16 (7):1–17, 2013.
- [35] J. M. Harrison and A. Zeevi. Dynamic Scheduling of a Multiclass Queue in the Halfin-Whitt Heavy Traffic Regime. *Operation Research*, 52(2):243 – 257, 2004.
- [36] T. Honda. Optimal Portfolio Choice for Unobservable and Regime-Switching Mean Returns. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28:45–78, 2003.
- [37] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [38] S. Ikonen and J. Toivanen. Efficient Numerical Methods for Pricing American Options Under Stochastic Volatility. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 24(1): 104–126, 2008.

- [39] S. Ikonen and J. Toivanen. *An Operator Splitting Method for Pricing American Options*. Partial Differential Equations. Modeling and Numerical Simulation. Computational Methods in Applied Sciences (Volume 16). Springer, Netherlands, 2008.
- [40] S. Ikonen and J. Toivanen. Operator Splitting Methods for Pricing American Options Under Stochastic Volatility. *Numerische Mathematik*, 113(2):299–324, 2009.
- [41] K. J. in 't Hout and S. Foulon. ADI Finite Difference Schemes for Option Pricing in the Heston Model with Correlation. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 7(2):303–320, 2010.
- [42] K. J. in 't Hout and B.D. Welfert. Stability of ADI Schemes Applied to Convection-Diffusion Equations with Mixed Derivative Terms. *Applied Numerical Mathematics*, 57(1):19–35, 2007.
- [43] K. J. in 't Hout and B.D. Welfert. Unconditional Stability of Second-Order ADI Schemes Applied to Multi-Dimensional Diffusion Equations with Mixed Derivative Terms. *Applied Numerical Mathematics*, 59(3-4):677–692, 2009.
- [44] T. S. Kim and E. Omberg. Dynamic Nonmyopic Portfolio Behavior. *Review of Financial Studies*, 9(1):141–161, 2015.
- [45] N. V. Krylov. *Controlled Diffusion Processes*. Applications of Mathematics. Springer, New York - Berlin, 1980.
- [46] P. Lakner. Utility Maximization with Partial Information. *Stochastic Processes and their Applications*, 56, 1995.
- [47] P. Lakner. Optimal Trading Strategy for an Investor: The Case of Partial Information. *Stochastic Processes and their Applications*, 76(1):77–97, 1998.
- [48] G. Leobacher, M. Szölgyenyi, and S. Thonhauser. On the Existence of Solutions of a Class of SDEs with Discontinuous Drift and Singular Diffusion. *Electronic Communications in Probability*, 20(6):1–14, 2015.
- [49] R. S. Liptser and A. N. Shiryaev. *Statistics of Random Processes I - General Theory*. Applications of Mathematics. Springer, New York - Heidelberg, 1977.
- [50] S. McKee, D. P. Wall, and S. K. Wilson. An Alternating Direction Implicit Scheme for Parabolic Equations with Mixed Derivative and Convective Terms. *Journal of Computational Physics*, 126:64–76, 1996.
- [51] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Universitext. Springer, Berlin - Heidelberg, 6 edition, 2003.
- [52] B. Øksendal and A. Sulem. *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions*. Universitext. Springer, Berlin, second edition, 2007.

- [53] H. Pham. *Continuous-Time Stochastic Control and Optimization with Financial Applications*. Stochastic Modeling and Applied Probability. Springer, Berlin - Heidelberg, 2009.
- [54] H. Pham and M.-C. Quenez. Optimal Portfolio in Partially Observed Stochastic Volatility Models. *The Annals of Applied Probability*, 11(1):210–238, 2001.
- [55] U. Rieder and N. Bäuerle. Portfolio Optimization with Unobservable Markov-Modulated Drift Process. *Journal of Applied Probability*, 42(2):362–378, 2005.
- [56] L. C. G. Rogers. *Optimal Investment*. SpringerBriefs in Quantitative Finance. Springer, Berlin-Heidelberg, 2013.
- [57] A. A. Samarskii. *The Theory of Difference Schemes*. Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker Inc., New York - Basel, 2001.
- [58] A. A. Samarskii and E. S. Nikolaev. *Numerical Methods for Grid Equations. Volume I – Direct Methods*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1989.
- [59] A. A. Samarskii and E. S. Nikolaev. *Numerical Methods for Grid Equations. Volume II – Iterative Methods*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1989.
- [60] A. A. Samarskij. *Theorie der Differenzenverfahren*. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1984.
- [61] J. Sass and U. G. Haussmann. Optimizing the Terminal Wealth Under Partial information: The Drift Process as a Continuous Time Markov Chain. *Finance and Stochastics*, 8(4): 553–577, 2004.
- [62] J. Sass, D. Westphal, and R. Wunderlich. Expert Opinions and Logarithmic Utility Maximization for Multivariate Stock Returns with Gaussian Drift. *www.arXiv.org*, 2016. URL <https://arxiv.org/abs/1601.08155>.
- [63] S. Schütze. *Ein Nutzenmaximierungsproblem mit unvollständiger Information und Expertenmeinungen in einem Finanzmarkt mit Markov-modulierter Drift*. PhD thesis, Brandenburgische Technische Universität Cottbus - Senftenberg, 2016.
- [64] A. A. Shardin and M. Szölgényi. Optimal Control of an Energy Storage Facility Under a Changing Economic Environment and Partial Information. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 19(4):1–27, 2016.
- [65] A. A. Shardin and R. Wunderlich. Partially Observable Stochastic Optimal Control Problems for an Energy Storage. *An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 89(1):280–310, 2017.
- [66] A. N. Shiryaev. *Probability*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, second edition, 1996.
- [67] L. Sotomayor and A. Cadenillas. Explicit Solutions of Consumption-Investment Problems In Financial Markets with Regime Switching. *Mathematical Finance*, 19(2), 2009.

- [68] M. Szölgényi. Dividend Maximization in a Hidden Markov Switching Model. *Statistics & Risk Modeling*, 32(3-4):143–158, 2016.
- [69] M. Thompson, M. Davison, and H. Rasmussen. Valuation and Optimal Operation of Electric Power Plants in Competitive Markets. *Operations Research*, 52(4):546–562, 2004.
- [70] M. Thompson, M. Davison, and H. Rasmussen. Natural Gas Storage Valuation and Optimization: A Real Options Application. *Naval Research Logistics*, 56(3):226–238, 2009.
- [71] J. Toivanen. *A Componentwise Splitting Method for Pricing American Options Under the Bates Model*. Applied and Numerical Partial Differential Equations. Scientific Computing in Simulation, Optimization and Control in a Multidisciplinary Context. Computational Methods in Applied Sciences (Volume 15). Springer, Netherlands, 2010.
- [72] R. S. Varga. *Matrix Iterative Analysis*. Springer Verlag, 2000.
- [73] A. Ware. Accurate Semi-Lagrangian Time Stepping for Stochastic Optimal Control Problems with Application to the Valuation of Natural Gas Storage. *SIAM Journal on Financial Mathematics*, 4(1):427–451, 2013.
- [74] W. M. Wonham. Some Applications of Stochastic Differential Equations to Optimal Non-linear Filtering. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 3:347–369, 1965.
- [75] G. Zhao and M. Davison. Optimal Control of Hydroelectric Facility Incorporating Pump Storage. *Renewable Energy*, 34(4):1064–1077, 2009.
- [76] G. Zhao and M. Davison. Valuing Hydrological Forecasts for a Pumped Storage Assisted Hydro Facility. *Journal of Hydrology*, 373(3-4):453–462, 2009.
- [77] R. Zvan, P. A. Forsyth, and K. R. Vetzal. Negative Coefficients in Two-Factor Option Pricing Models. *Journal of Computational Finance*, 7(1), 2003.